This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

[illegible]

[illegible]

[illegible]

QA
35
.H88

1779

F. Weindler

1588

a. Erding[illegible]

INSTITUTIONUM MATHEMATICARUM

OPUSCULUM I.

ARITHMETICA.

AUTHORE

P. FRANCISCO HUBERTI, S. J.



Cum Permiſſu Superiorum.

FRANCOFURTI AD M. ET MOGUNTIÆ,

Sumptibus FRANCISCI VARRENTRAPP.

MDCCLIII.

1753

PROOEMIUM.

ARITHMETICA *Vulgaris* & *Elementaris* complectitur, ſuppoſitâ numerandi ratione ab Arabibus ad nos traductâ, Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Diviſionem Numerorum tam Integrorum quàm Fractorum, eorundem Proportionem; Regulas inveniendi terminos proportionales, Societatis, Falſi, Mixti, Alligationis; Extractionem Radicis Quadratæ & Cubicæ; Progreſſionem Arithmeticam & Geometricam. Hæc ſunt, quæ ab Arithmeticis paulo cultioribus per trina ferme ſæcula pertractari conſueverunt. Aliam

nobis Arithmeticam, paulo poſt recenſendam, antiquiora tempora reliquerunt. Nullas illa praxes, nullas de memoratis ſpeciebus Regulas conſignaverunt.

Neque tamen quisquam exiſtimet, has Arithmetices Elementaris partes ignoratas à Veteribus fuiſſe. Etenim qui his multo ſublimiora ac recondita numerorum arcana mirâ ingenii acie penetraverunt, qua ratione putandi ſunt minorum cognitione caruiſſe? qua ratione Numerorum Proportionem verſare, Primorum & Compoſitorum indolem ſcrutari quisquam poteſt, quin in ipſorum etiam Fractorum naturam deſcendat? Crediderim itaque, hæc a majoribus pridem ſcita traduce manu ad nos perveniſſe, eſto nos fugiant Anthorum & Inventorum nomina; aut Regulas Arithmeticas Alphabeti literis, ut apud Romanos aliasque gentes fiebat, olim applicatas, ſenſim obliteratas intercidiſſe, poſtquam Arabum Arithmetica Sæculo 9 & 10. ſeſe ubique

explicare & in uſum communem tranſire cœpit.

Inter priſcos Philoſophos enituit Pythagoras Samius, qui, teſte Proclo & Plinio, perluſtratâ Ægypto & Perſide primus Arithmeticam in Græciam invexit aut ſaltem illuſtravit, annis ante Chriſtum natum ferme 600. Hujus diſcipulus Nicomachus ſcripſit Libros Arithmeticorum duos; in primo definit Numerum & partitur in parem & imparem, primum & compoſitum, perfectum & imperfectum; tum Numerum multiplicem, ſuperparticularem, ſuperpartientem &c. proſequitur. In altero perſtrictâ quarundam Rationum compoſitione expendit Numeros figuris Geometricis Analogos, puta linearem, planum, quadratum, ſolidum, ſphæricum, pentagonalem. Tum ad proportionalitatem, ad medietatem Geometricam, Arithmeticam & Harmonicam deſcendit. Hæc

a Nicomacho ſe accepiſſe fatetur Boëthius, Sæculi VI. illuſtris Author. Annis ante Chriſtum natum circiter trecentis Euclides plurimas & inſignes Numerorum proprietates evolvit, in Libro præcipue 7mo, 8vo & 9no. Qui poſtea ſcripſerunt, vel commentarios in Nicomachum & Euclidæa texuerunt, vel quædam dictorum argumentorum delibaverunt. Hæc Antiquorum Arithmetice.

Recentiorem perfecerunt Sæculo XV. Jacobus Faber Stapulenſis; Sæculo XVI. De la Roche, F. Lucas de Burgo S. Sepulchri Ord. Minor. Joan. Fernelius, Stifelius, Tartaglia, Franciſc. Maurolycus Abbas Meſſanenſis, Gemma Friſius, Chriſtoph. Clavius S. J. Petrus Ramus. Inter Sæculi XVII. complures celebresque Arithmeticæ Magiſtros eminet Joannes Neperus Scotus, Baro Merchiſtonius, Inventor Logarithmorum, quorum Canonem edidit 1614; cui operi hanc meri-

to epigraphen præfixeris: *Anteceſſoribus noſtris ſapientiores ſumus*. Aliorum Scriptorum nomina largiùs proſequitur. Pater Des Chales *Tom. I. Tract. Proœmiali*.

Cæterum in tanta Virorum multitudine P. Andreas Tacquet S. J. primus extitit *, qui univerſam Arithmeticam vulgarem, ejusdemque Regulas ſingulas demonſtrationibus roboraret, exemplo ſuo mox plures trahens eruditæ operæ æmulos. Ex eo Arithmeticam nacti ſumus politiore habitu nitentem, dignam, quæ in Academiis & literarum Gymnaſiis reſideat, Arithmeticâ *Arte* Pædagogiis relictâ. Et quanquam opuſculum hoc noſtrum ita inſtruxerimus, ut, qui voluerit, Arithmeticam ex eo, præteritis demonſtrationibus, haurire poſſit; magnopere tamen Tironem ſtudioſum moneo hortorque, ut in ipſas etiam Apodixes ſedulo incumbat: nam præterquam quòd Apodictica Arithmetice ingenii vires acuat, ac ſuî cultorem ad cæteras Diſ-

* Ejusd. Arith-met. Edit. Amſtelod. 1704. in Præfat.

ciplinas tum Philoſophicas tum Mathematicas idoneum efficiat, iſtud etiam emolumenti feret, quòd ejusmodi Arithmeticam ſit comprehenſurus, quæ altiùs & in animum & in memoriam penetret: ſolet namque Arithmetica, *Ars*, niſi eam aſſidua praxis & exercitatio retineat, animo facile effluere & perire; cùm ex adverſo Arithmetica rationibus ſuis & demonſtrationibus illuſtrata totidem anſas afferat, quibus comprehenſa tenacius animo defigatur, ac poſt longius otii intervallum firmior nihilominus perduret.

MONITUM
AD
TIRONEM.

Quò facilius Arithmeticam combiberes, ſingula ejus præcepta uno alterove Paradigmate illuſtravi: ad quorum normam ſi tu propriâ exercitatione & induſtriâ ſimilia, atque horum inſuper rationem demonſtrationemve a temet exegeris, plus proficies paucis operationibus, quam ſi libro inſudares immenſâ exemplorum farragine farto. * *Si magnos & celeres in Arithmetica progreſſus deſideres, hanc nunquam lege niſi calamo inſtructus, quo primùm ipſamet hujus opuſculi paradigmata ſecundùm dogmatum præſcriptionem expri-*

---

* *Siquem tamen Exemplorum copia delectat, ſylvam horum ſuppeditabit Hemmelingi Arithmetica Germanica.*

mes, mox alia ad poſitorum exemplar ſolerti imitatione ſubjunges.

Si aliam non ambis Arithmeticam, quam quæ foro & vulgaribus humanæ civilisque vitæ uſibus ac tenuiori Matheſi ſerviat, ſatis erit, Caput I, II, & IIItii Articulum Imum comprehendiſſe. Reliqua Geometriæ potiſſimum famulantur, viamque ſternunt ad decurrendas expedite alias Matheſeos partes: unde ab eo, qui ad ſublimiora aſpirat, aut nunc condiſcenda, aut (quod minime reprehendendum) tunc adeunda, poſtquam Geometriam aliquantiſper deguſtaverit.

Geometrica quædam, facillima illa quidem & planiſſima, in Cap. IV. adduco, non tanquam hîc loci ſcitu neceſſaria, ſed velut ea, quæ nata ſint circa Radicum extractionem aut clariorem ideam generare, aut vim imaginativam egregie juvare.

Quæ in §§. 19. 30. & 42. *Definitionis* 5. *Scholio occurrunt, ſi primo intuitu*

non percipiantur, prætermitti poſſunt, dum doctrina Proportionum Capite II. & Fractionum natura, §. 50 & 51, fuerit expoſita, tum enim nullo negotio illuceſcent.

Ne nimiâ rerum varietate diſcentem morarer, nonnulla reſervavi Appendici ſub calcem opuſculi reperiundæ; quam, cùm in vulgaribus Arithmeticæ praxibus confirmatior fueris, adibis. Continebit illa non pauca ſcitu & jucunda & utilia.

Quoniam, quæ generatim aſſeruntur, ſpecifico Exemplo longe dilucidiora evadunt; quantitati Numericæ generatim ſumptæ nonnunquam ſuppoſui quantitatem determinatam monetæ, in ea Germaniæ parte, in qua ſcribo, notiſſimæ. Si tamen libellus hic in aliquorum fortaſſe manus incideret, quibus id monetæ genus minùs cognitum, noverint, unum Imperialem noſtratem ſeu Thalerum continere unum Florenum

cum dimidio, Florenumque proinde valere unius Imperialis duas tertias, Florenum porro dividi in tria Capitella, in 15 baceos, in 20 groſſos, in 30 albos, in 60 crucigeros; crucigerum in 4 denarios.

Ante, quam operi legendo te accingas, errata in fine opuſculi recenſenda ſedulo corrige, ne inter lectitandum remoram patiare. Adnotavi ſolùm potiſſima, quæ opuſculum relegenti primùm occurrerunt, & , abſente a loco Typographii Authore, irrepſerunt. Reliqua leviora Lector benevolus & excuſabit, & facile ipſe corriget.

Demum compendiarias notas citationum in margine ſeſe offerentium ita explica. Pro, *Pr.* 3. lege, per Propoſitionem tertiam. Pro, *Hyp.* per Hypotheſin. Pro, *Def.* 1. *n.* 3. , per Definitionis Imæ numerum 3tium. Pro, *Ax.* 6.

per Axioma ſextum. Pro, *Pr. 6. Cor. 2.* per Propoſitionis ſextæ Corollarium 2dum. Pro, *Pr. 7. p. 1.*, per Propoſitionis 7mæ partem primam. Pro, *Conf.* conferatur. Pro, *C. 1. Ax. 1.*, per capitis Imi Axioma 1. Cætera ex ipſo verborum contextu intelligentur, ùt dum Pag. 40. in corollar. 1. legis, 1 : m : : M : P., ſatis ex antecedentibus patet, denotari per, 1, unitatem, per, *m*, multiplicandum, per, M, Multiplicandum, per, P, Productum. Dum vero in aliquo Capite ſimpliciter indicatur aliqua Definitio aut Axioma, indicatur Definitio vel Axioma præſentis Capitis.

Elenchus Opuſculi.

CAPUT I. De quinque Arithmetices Elementaris operationibus . Pag. 1

CAPUT II. De Proportione . - 37

CAPUT III. De Numeris Fractis vulgaribus & Decimalibus . - 54

CAPUT IV. De Extractione Radicis Quadratæ & Cubicæ . - 78

CAPUT V. De Progreſſionibus & Logarithmis . - 101

CAPUT VI. De Permutatione & Combinatione . - 126

Appendix. Continens obſervationes quasdam & Additamenta ad nonnulla priorum Capitum argumenta . - 133

INSTITUTIONES ARITHMETICÆ.

Arithmetica eſt Scientia, quæ verſatur circa Numerorum affectiones & uſum. Dividitur in Vulgarem, quam hic tractabimus, & in Coſſicam ſeu Algebram, de qua alibi.

CAPUT I.

De Quinque Arithmetices Elementaris operationibus; Numeratione, Additione, Subtractione, Multiplicatione, Diviſione.

ARTICULUS I.

Præmiſſis quibusdam fundamentis, docetur *Numeratio*.

§. 1. DEFINITIO I. Res aliqua denominata dicitur *unum*, quatenus non eſt diviſa in plura ejusdem denominationis. Sic Exercitus Hiſpanus, Florenus, dicuntur unum, dum intelliguntur non eſſe diviſa in plures exercitus, florenos &c. Unde liquet, poſſe rem quamlibet certa ratione dici unam. § 1.

§ 1. DEFINITIO II. Quantitas A dicitur *Multipla* vel *Multiplex* quantitatis B, quando hanc continet præciſe & exacte vel bis, vel ter, vel quater, &c. Diceturque tunc quantitas continens A *dupla*, vel *tripla*, vel *quadrupla* &c. de B; & B contenta audiet *ſubdupla*, *ſubtripla*, *ſubquadrupla* &c. de A. Sic 100 eſt quadruplum de 25, & 49 ſeptuplum de 7.

DEFINITIO III. *Numerus* eſt complexum ex pluribus unitatibus. *Nonnunquam tamen minus rigoroſe accipimus Numeri nomen, & tunc ſub illo etiam unitas venit.*

DEFINITIO IV. *Numeratio* eſt recta dati Numeri ſecundùm valorem enunciatio. *Hac ut rite fiat, probe intelligenda notarum & numerorum inſtitutio, arbitrarie olim facta, & originem (ut fertur) trahens a Phoenicibus.*

§ 2. HYPOTHESIS I. Placuit autem primis Arithmetices inventoribus ponere novem notas ſignificativas, ſcilicet: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; & 0, Cifram vel Zerum dictam; quæ quidem nota per ſe nihil ſignificat, aliis tamen notis poſtpoſita harum valorem auget. Notarum ſignificativarum prima (1) dicitur unitas; ex duabus unitatibus naſcitur altera nota ſeu numerus 2; ex tribus tertia 3, ex quatuor quarta 4; & ſic deinceps.

§ 3. HYPOTHESIS II. In numero plurium notarum v. g. 2435, *primam* vocabimus illam, quæ a ſiniſtris, *ultimam* quæ a dextris numerum claudit.

§ 4. HYPOTHESIS III. Porro ſi detur numerus pluribus conſtans notis, in loco ejus ultimo α, ponemus tantum unitates eas, quæ numerum 9 non tranſcendunt; & has voco *Unitates ſimplices*, vel *Monades*. Decem Monades componunt unam *Decadem*, ſeu unitatem Decadicam, quæ collocatur in loco penultimo β, in quo eodem poni poſſunt & reliquæ notæ 2, 3, 4, 5, &c. usque ad novenarium incluſive, ita tamen, ut in β ſignificent tot Decades, quot in α denotaſſent Unitates: quod idem ſimili modo intelligendum de omnibus aliis notis in anteriora ponendis. Rurſum decem Decades conſtituunt Unitatem, quam voco *Centenariam*, ponendam in γ. Decem Centenarios voco *Millenarium*, ponendum in δ. Ex decem Millenariis conflatur *Decas Millenariorum*, ex harum decem *Centenarius Millenariorum*, ex horum 10 unus *Millio*, & ſic deinceps ſecundùm valorem & appellationem, quam ſequens Tabella dabit. § 4.

2 4 3 5
δ γ β α

§ 5. Tabula exhibens Notarum locum & valorem.

Trilliones.			Millenarii Billionum.			Milliones Millionum ſeu Billiones.			Millenarii Millionum.			Milliones.			Millenarii.					
Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.	Centenarius.	Decas.	Unitas.
8	2	3;	5	4	2,	0	9	6;	2	5	1,	3	0	4;	8	7	2,	6	3	2
x	*u*	*t*	*s*	*r*	*q*	*p*	*o*	*n*	*m*	*l*	*k*	*i*	*h*	*g*	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*

§ 5. SCHOLION. *Sicut poſt unitates Millionis ſexta nota* n, *ſignificat Billionem, ita poſt hanc ſexta* t, *ſignificat Trillionem: eodem modo ſequitur Quadrillio, Quinquillio, Sextillio &c. Ex hactenus poſitis, quæ meram faciunt hypotheſin & arbitrariam numerorum inſtitutionem, (poterant enim, ſi lubuiſſet, aliæ numerandi rationes a propoſita diverſæ, conſtitui) ſponte fluunt ſequentia conſectanea.*

§ 6. COROLLARIUM I. Quando loca notarum aliqua ſunt vacua, debet locus Zero repleri, quò ſequentes aliæ notæ obtineant debitum ſibi locum & valorem; quod non fieret omiſſo Zero.

COROLLARIUM II. Omnis numerus eſt multiplus unitatis. Unde hic numerus 150, continet centum & quinquaginta unitates; iſte, 1000, mille unitates, vel millies unitatem.

COROLLARIUM III. Si unitas *a* promoveatur uno gradu a dextra ſiniſtram verſus in *b*, (quod fit ei poſtponendo Zerum) ejus valor creſcit decuplo: ſi promoveatur ad gradum ſecundum in *c*, creſcit centuplo ſeu binis incrementis decuplis: evecta ad gradum tertium valet ibi mille; & ſic deinceps. Similiter autem & quævis alia monas, v. g. *a* in Tabella § 5, promota ad gradum primum *b*, creſcit valore decuplo; nam uti unitas promota ad gradum *b* valet ibi unam decadem, ita duæ unitates promotæ ad eundem locum valent ibidem decades duas. Ex eadem ratione, quævis nota intermedia v. g. *c*, promota ad gradum *d*, illic va-

10 . 1
b . *a*
100 .
c

let decies plus; promota ad gradum alterum § 6.
l valet centies plus &c. Unde notam *c*, valituram decies millionies plus, pone in *k*, ut evadat 6000;000,000.

E quibus porro evidenter ſequitur, ut totus aliquis numerus v. g. 234 creſcat decuplo, unicum illi Zerum eſſe adnectendum, hoc modo 2340; tum enim quævis dicti numeri nota ſublimatur ad gradum primum ſeu decadicum. Ut vero creſcat centuplo, duo Zeri erunt ſubjungendi, h. m. 23400; atque ita deinceps.

COROLLARIUM IV. Quot monades requiruntur ad conſtituendam certam notam loci *a**, v.g. 6, totidem unitates decadicæ requiruntur ad conſtituendam ſimilem notam decadicam 60; & totidem unitates centenariæ conſtituent ſimilem notam centenariorum, videlicet 600; & ſic de aliis. *Tab. I. §. 5.

Rurſus quot monades ſunt computandæ ad habendum notæ alicujus monadicæ certum multiplum v. g. triplum, tot unitates decadicæ aut centenariæ ſunt computandæ ad habendum idem multiplum v. g. triplum ſimilis notæ decadicæ vel centenariæ. Unde ſi triplum monadis 5 conſtet 15 unitatibus ſimplicibus, etiam triplum notæ millenariæ 5,000 conſtat 15 unitatibus millenariis (ſeu una decade millenariorum, unà cum quinque millenariis) i. e. 15,000.

§ 7. DEFINITIO V. Quando unitas ceu Totum intelligitur dividi in partes æqua-

§ 7. les; tunc pars, vel partes hujus unitatis ita diviſæ, dicuntur *Fractio*. Numerus vero compoſitus ex unitatibus integris (non fractis) dicitur *Integer*. *De his uberius Cap. III.*

DEFINITIO VI. *Numeri homogenei* ſunt, qui exprimunt res ejusdem ſpeciei & denominationis, ut 2 & 35 Floreni. *Numeri heterogenei* exprimunt res diverſæ ſpeciei & denominationis; tales ſunt: 2 Itali & 35 gemmæ.

§ 8. AXIOMATA GENERALIORA:

I. Totum eſt idem cum partibus omnibus ſimul ſumptis.

II. Totum eſt majus ſua parte, & pars minor Toto.

III. Si æqualibus æqualia addas; quæ proveniunt, ſunt æqualia.

IV. Si ab æqualibus æqualia auferas; quæ remanent, ſunt æqualia.

V. Quæ ſunt æqualia uni tertio, ſunt æqualia inter ſe.

VI. Quantitas, quæ altera quantitate nec major nec minor eſt, eſt huic æqualis.

VII. Si fuerint A & B æqualia; tunc ſi ipſi B ſubſtituas æquale X, erunt etiam A & X æqualia.

VIII. Quæ ſunt ejusdem æque multipla, i. e. aut dupla, aut tripla &c. ſunt æqualia.

IX. Quæ ſunt reſpectu ejusdem dimidium, aut pars tertia, vel quarta, &c. ſunt æqualia.

X. Subtractis a Toto partibus omnibus, remanet nihil.

PROBLEMA. § 9.

§ 9. *Propoſitum Numerum enunciare.*

Sit Numerus 62357903432; incipiendo a dextra ſiniſtram verſus, poſt tres quaslibet notas pone comma; ſextam vero quamlibet juvabit interſtinguere commate cum puncto, in hunc modum: 62, 357; 903, 432; atque ubi familiarem tibi reddideris Tabulam § 5, expeditiſſime ſic pronunciabis: Sexaginta duo *Millia Millionum*, trecenti ac quinquaginta ſeptem *Milliones*, nongenta & tria *Millia*, Quadringenta & triginta duo. Germanice: Sechzig zwey Tauſend Million; dreyhundert, fünfzig ſieben Million; neun hundert und drey Tauſend; vier hundert und dreißig zwey. Aliis placet numerum majorem, v. g. illum, § 5, ita enunciationi aptare: 823‴, 542, 096″, 251, 304′, 872, 632, ita ut unâ virgulâ Milliones, duabus Billiones &c. deſignentur.

Si noveris expedite enunciare numerum duabus vel tribus notis conſtantem, v. g. hunc A 357; facile etiam enunciabis quemlibet alium v. g. hunc 357, 423, 000; nam poſt commata formata enuncia primum membrum, velut enunciares ſolitarium A; tantummodo memento addere appellationem Millenarii vel Millionis, vel aliam, quæ illi competit ex Tabula § 5.

ARTICULUS II.

De Additione.

§ 10. DEFINITIO. *Additio* eſt plurium Numerorum in unam Summam collectio.

OBSERVA. In hoc & ſequente Articulo ſermo nobis tantum erit de numeris homogeneis: nam de Additione & Subtractione heterogeneorum commodius agetur § 41.

§ 11. **PROPOSITIO I.** *Problema.*

§ 11. *Numeros plures propoſitos (A, B, C) addere, ſeu in unam Summam (S) colligere.*

Numerum quemlibet ſub alio vel aliis ita ſcribe, ut monades monadibus, decades decadibus, centenarii centenariis &c. in una veluti recta columna ſibi reſpondeant. Subductâ deinde lineâ, collige *primo* monades in unam ſummam, quæ ſi conſtiterit unicâ notâ, ſcribitur hæc infra lineam in loco monadum, ùt fit in Exemplo I; ſi duabus notis conſtet, harum poſtrema ſcribatur in loco monadum, prima autem transferatur ad columnam anteriorem, (nempe hic ad columnam decadum, cùm hæc translata & ipſa decadica ſit,) ejusque notis accenſeatur. Vide Exempl. II. & III. Si (quod rarius accidit) ſumma monadum effecerit numerum trium notarum, v.g. hunc 132, ultima ſcribitur in loco monadum, ſecunda accenſetur decadibus, tertia centenariis. Si in columnarum aliqua nulla nota ſignificativa occurrerit (ùt fit in columna tertia Exempli II.) ſubſcribitur infra Zerus. *Secundo*, ſimili modo operaberis circa columnæ ſecundæ notas, (non omittendo illis accenſere notam e columna prima huc forte translatam;) ſimili modo circa notas columnæ ter-

Exempl. I.

3	1	5	0	0	2
	8	0	0	0	5
3	9	5	0	0	7

Exempl. II.

	2	0	0	8
3	4	0	0	4
	5	0	0	3
4	1	0	1	5

Exempl. III.

	9	5	0	3	4	A
		5	4	7	6	B
			2	2	0	C
1	0	0	7	3	0	S

tiæ, quartæ &c. Quo facto Summa S continebit numeros A, B, C. § 11.

DEMONSTRATIO Exempli III. Quod continet omnes partes Numerorum A, B, C, continet etiam hos Totos (cùm partes omnes ſimul ſumptæ ſint ipſum Totum.) Atqui, juxta præſcriptum operandi modum, Summa S continet omnes partes Numerorum A, B, C, videlicet omnes eorum monades, decades, centenarios, (ſi quæ fuerint) Ergo Summa S continet totos Numeros A, B, C. *Quod erat demonſtrandum*

§ 12. EXAMEN Additionis certum fit, ſi Numeros A, B, C, ſingulatim ſubtrahas e Summa; quo facto remanebit nihil. *Demonſtratur:* Si e Toto S ſubtraxeris primò ipſum C, deinde B, demum A, ſubduxiſti e Toto partes omnes; igitur remanet nihil *. At quia hoc laborioſum, optime Examen inſtitues per iteratam Additionem: & ſi prius numeros collegiſti ab infimo ſurſum, conſultum erit in Examine eosdem a ſummo deorſum attente colligere.

* Ax. 10.

Cæterum fallit, nec univerſaliter tenet Examen a vulgo Calculatorum adhiberi ſolitum, quo tum e numeris addendis, tum e Summa toties rejiciunt 9, quoties poſſunt, atque ſi utrinque aut nihil aut æquales numeri remaneant, judicant operationem legitime peractam. Vide adjectum Exemplum. Id equidem verum: quotiescunque operatio rite facta, abjectis utrinque, quoties fieri poteſt, novenariis, remanet utrinque vel æqualis numerus, vel nihil. Sed non viciſſim, quoties id accidit, operatio eſt probe facta.

3	5	8	(7
2	3	4	
5	8	3	(7

§. 13. ## ARTICULUS III.

De Subtractione.

§ 13. DEFINITIO. *Subtrahere* numerum B ex numero A, eſt invenire numerum tertium R, qui exhibeat reſiduum de A, poſtquam ab hoc ablatus fuit B. Numerus B dicitur *Subtrahendus*, R *Reſiduum*; qui & *Differentia* vocatur, quòd exhibeat eum numerum, quo differunt inter ſe A & B, aut quo A excedit ipſum B, qui exceſſus ſi auferretur ex A, A & B forent æquales.

24	A
4	B
20	R

§ 14. *Juvat hoc loco adnotare ſigna quædam & characteres, queîs commode ſubinde utemur. Signum* Æqualitatis *aut Identitatis ſic effingitur* $4 = 4$, *quo indicatur*, 4 *eſſe æquale ipſi* 4, *vel idem cum illo. Extrema huic Signo affixa vocantur membra æquationis.* II. *Signum* Additionis *aut collectionis eſt tale* $+$; *ſic* $2 + 3 = 5$, *ſignificat, duo ampliùs tria, ſeu duo & tria collectim ſumpta eſſe æqualia* Τῷ 5. III. *Signum* Subtractionis *eſt iſtud* $-$. *ſic* $6 - 2$ *ſignificat*, *6 minus 2; quod idem valet ac* 4.

AXIOMATA.

§ 15. I. Ex nihilo nihil poteſt ſubtrahi.

II. Quantitas, e qua nihil ſubtrahendum, manet.

III. Numerus major non poteſt auferri a minore.

IV. Si numerus (v. g. 40) auferatur ab æquali, remanet nihil.

V. Si illud, quod abſtuliſti ex A, addas § 15.
hujus reſiduo; prodit prior quantitas A.

COROLLARIUM. Hinc ſi ex Numero A ſubtrahas E; & ex reſiduo F ſubtrahas G; & rurſus ex reſiduo H ſubtrahas I, & ſic deinceps: tum $E + G + I$, unà cum reſiduo ultimo K, ſi quod fuerit, in unam Summam collecta adæquant ipſum A.

A	28512	A	28529
E	27000	E	27000
F	1512	F	1529
G	1080	G	1080
H	432	H	449
I	432	I	432
K	0	K	17

Nam $A = E + F$; & quia $F = G + H$, erit $A = E + G + H$; & cum ſimiliter ſit $H = I + K$, propterea erit $A = E + G + I + K$.

SCHOLION. Hujusmodi Demonſtrationes, in quibus occurrunt quantitates æquales, ſigno = affectæ, facillime capiuntur, ſi in charta deletæ uni quantitati ſuperſcribas aliam æqualem; vel, quod melius, ſi in tabula aut palimpſeſto quantitati uni penitus abolitæ, ſubſtituas æqualem alteram.

PROPOSITIO II. *Problema.*

§ 16. ***Numerum minorem B e majore A ſubtrahere.***

I^mo. Numerus minor B ponatur ſub A, ut dictum § 11. Subduc lineam. Incipiendo a dextra ſiniſtram verſus, ſubtrahe primò unitates ab unitatibus, deinde decades a de-

		Exempl. I.
3464	A	
2342	B	
1122	R	

§. 16. cadibus &c., & cujuslibet notæ ſuperioris Reſiduum ſcribe infra lineam, ùt Exemplum I docet.

δ	γ	β	α	
3	4	6	4	A
2	6	4	5	B
	8	1	9	R

Exempl. II.

IIdo. Si nota inferior (v. g. 5. in Exemplo II) major fuerit ſuperiore, 4; ſumatur mutuo unitas a nota proxime ſiniſteriore, intelligaturque tunc ſuperior (4) aucta denario, quocum componit 14; ab his 14 ſubtrahe 5, reſiduum 9 ſcribe infra lineam: nota autem 6 in columna β, a qua unitas fuit mutuo accepta, poſtmodum unitate mulctata (videlicet non amplius 6, ſed 5) reputetur. Unde ſi talis ſuperior fuerit 1; poſtea valebit 0.

6	0	3	2	4	A
5	0	0	2	0	B
1	0	3	0	4	R

Exempl. III.

IIItio. Si in numero inferiore B occurrant Zeri (ùt in Exemplo III,) infra lineam ſcribuntur notæ numeri majoris A, *per Axioma II*. Et, *per Axioma III*, ſi æqualis ab æquali auferendus ſit, ſubſcribitur Zerus: quod & tunc fit, cùm nota tam ſuperior quam inferior fuerit Zerus. *

* §6. Cor. 1.

ζ	ε	δ	γ	β	α
2	0	0	0	4	0
	5	4	3	2	2
1	4	5	7	1	8

Exempl. IV.

IVto. Si Zerus occurrat in numero ſuperiore, a quo nequeat ſubtrahi nota inferior ſignificativa; accipe mutuo unitatem a nota proxime ſiniſteriore (4), eamque transfer in locum dicti Zeri, ubi valebit denarium *: ab hoc itaque poteſt fieri, & fiat ſubtractio. Si plures Zeri ſeſe inſequantur, ùt in columna γ, δ, ε; primus in γ reputetur pro denario, reliqui

* §4.

omnes pro novenario, a quibus poteſt fieri & fiat ſubtractio: nota autem ſignificativa proxime ſiniſterior (2, in columna ζ) æſtimetur unitate mulctata. Nam cùm omnibus his Zeris poſſit ſubſtitui ea quantitas, à qua poſſit inferior detrahi, id fiet ſi ipſi (ζ 2) ✱ dematur unitas, quæ in ε tranſlata, valebit ibidem 10 decades millenarias: harum decadum unitas transferatur in δ; remanebunt in ε 90,,000; tranſlata autem illa unitas valet in δ decadem millenariam: e qua ſi rurſus unitatem tranſferas in γ, valebit hæc ibidem decadem centenariam, remanentibus in δ 9 millenariis. § 16.

DEMONSTRATIO Exempli I, II, III (Exempli IV rationem modò dedimus.) Numerus A tanquam Totum conſtat ex unitatibus, decadibus, &c. ceu partibus omnibus. Sed (*ex operatione ipſa*) R exhibet reſiduum unitatum, decadum &c. R proinde exhibet verum totius A Reſiduum. *Q. e. d.*

Aliud Exemplum, complectens ſuperiores regulas.

4300101011114003000094900
9740243506122456420000
4290360767607880543674900

SCHOLION. *Quando in ſubtractione mutuo aliquid accipis a nota ſuperiore; proderit, præſertim incipienti, notam illam anteriorem puncto aliquo notare, ut, cùm ad illam pervenis, memineris unitate fuiſſe minutam.*

43348
33439
9909

✱ *Valet autem hæc nota ζ 2, ſecundùm valorem loci accepta* 200000; *velimque deinceps conſtanter attendas ad ſimilem notæ cujusque ſublimatæ valorem; quod hic ſemel monuiſſe ſufficiat.*

§. 17. §. 17. EXAMEN Subtractionis certum fit, addendo Subtrahendum B Reſiduo R; Summa emergens, æqualis numero A, probat operationem legitime factam. Nam in quavis ſubtractione eſt B + R = A, *per Axioma IV.*

ARTICULUS IV.

De Multiplicatione.

§. 18. DEFINITIO I. *Multiplicare* numerum A per B, vel (*ùt aliis terminis ſolent Mathematici loqui*) ducere numerum A in B, eſt invenire tertium C, qui toties contineat numerum A, quoties unitas continetur in B. Vel *Multiplicare* A per B, eſt invenire tertium C, qui toties ſit multiplus de A, quoties B eſt multiplex unitatis. Numerus A dicitur *Multiplicandus*, B *Multiplicator*, C *Productum*.

2	4	A
	2	B
4	8	C

§. 19. Memorata Definitio competit tantùm numeris Integris, de quibus hic nobis ſolùm ſermo eſt, minime Fractis, per quos tamen interdum etiam apud Mathematicos indicatur & fit multiplicatio; ùt ſi multiplicandus foret numerus 9 per fractum *a b*, ſignificabitur, non eſſe aſſumendum numerum 9 integrum, ſed hujus partem, nimirum duas tertias, h. e. 6. Unde multiplicationis naturam latiore conceptu ita complecteris: Multiplicare numerum A per B, eſt ſumere toties ipſum A, aut certas ejus partes, prout id indicant aut unitates aut unitatis partes in numero B. Vel: Numerus A multiplicatur per B, cùm invenitur C, qui ita ſit ad A, ùt multiplicator B ad unitatem. Quare ſi multiplicans fuerit Fractio unitate minor, etiam productum C debet eſſe minus Multiplicando A.

$\frac{a}{b}$ $\frac{2}{3}$

§ 20. DEFINITIO. II. Quando numerus (v. g. A 3) in ſeipſum ducitur, productum (9) dicitur *Quadratum*, & A ejus *Radix quadrata*. § 20.

§ 21. *Signum* Multiplicationis *eſt iſtud* ×. *Sic* 2 × 4 = 8, *ſignificat*, 2 *ductum in* 4 *generare* 8. *Si occurrat hæc ſignatio* (2 × 4) × 3 = 24; *denotatur productum ex* 2 × 4 (*i. e. ipſum* 8) *de novo multiplicatum per* 3, *adeoque denotatur productum* 24. *Algebraiſtæ pro notis Numericis utentes Alphabeti literis, ſolent duarum literarum per ſe invicem multiplicationem exprimere, literas ſine ullo ſigno juxta ſeſe ponendo: ſic ſi* a & b *ſignificent duas diſtinctas quantitates*, a b *denotabit* a *multiplicatum per* b: & *hæc ſignatio* a a b *æquivalebit huic* (a × a) × b. *An verò in hoc ſchemate*, a b, *duæ hæ literæ ſignificent multiplicationem per ſe invicem; an verò unam tantum aliquam quantitatem, ex ipſo ſermone debet colligi*.

AXIOMATA.

§ 22. I. Nihilum ductum in Nihilum non producit quidquam. Neque Nihilum multiplicat ullam monadem, decadem &c. Neque monas, decas &c. ipſum Nihilum; nam centies nihilum eſt & manet nihilum.

II. Æquales numeri per eundem tertium multiplicati generant producta æqualia.

III. Si quantitatis alicujus partes omnes (qualeſcunque illæ ſint, ſive ſemiſſes, ſive tertiæ, ſive quartæ &c.) duplicentur, triplicentur &c; etiam Totum duplicatur, tripli-

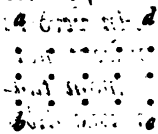
§ 22. catur &c; & contra. *Sit aggregatum ex* 1 *Floreno*, 3 *baceis*, 2 *xris*; *ſi omnium harum partium duplum accipias, accipies Totius aggregati duplum.*

COROLLARIUM. Idem igitur Productum F obtinebis, ſive multiplices Totum A per D, ſive Totius partes ſingulas *b*, *c* per idem D, harumque Producta colligas in unam Summam *m* + *n*: cùm tam F, quam *m* + *n* nihil ſint, atque ipſum A per idem D multiplicatum.

A 2 4 | *b* 2 0 . *c* 4
D 2 | 2 . 2
F 4 8 | *m* 4 0 . *n* 8

Schema Multiplicationis.

IV. Si ſint duo numeri qualescunque (v. g. 3, 5); idem Productum (15) prodibit, ſive ducas 3 in 5, ſive 5 in 3. Quod evidens omnino fiet; ſi quamcunque multiplicationem punctis exprimas, ut in adjecto Schemate fit;



in quo *primò* ſit *a b* Multiplicandus, *a d* multiplicator; erit *a b c d* Productum continens ter quinarium. Sed ſi *ſecundò* fiat *a d* Multiplicandus, *a b* multiplicator, manet idem Productum continens ter quinarium; adeo ut quinquies tria neceſſario etiam ſint ter quinque: quod ipſum afferit Axioma, & de quavis alia multiplicatione verum eſt. *Axioma iſtud quamvis forte ex ipſis terminis non videatur evidens, manifeſtiſſimum tamen evadit juncto Schemate, quo multiplicatio repræſentatur.*

Quomodo Multiplicatio aliter poſſit repræſentari & Axiomatis IV, veritas exponi per Productum ex lineis in ſe ductis, intelligetur ex § 74.

§ 23.

§ 23. Postulatum. Conſtruatur per Additionem numerorum *Abacus Pythagoricus*, exhibens Producta ſingularum monadum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, in ſe mutuo ductarum; vel, quod idem eſt, qui exhibeat cujusque monadis multiplum, quod tamen ſupra noncuplum non aſcendat. § 23.

A m C

	1	2	3	4	5	6	7	*8	9	
	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
	4	8	12	16	20	24	28	32	36	
	5	10	15	20	25	30	35	40	45	
	6	12	18	24	30	36	42	48	54	
e	*7	14	21	28	35	42	49	56	63	f
	8	16	24	32	40	48	56	64	72	
	9	18	27	36	45	54	63	72	81	

B n D

*SCHOLION. Ut invenias, quid ſint v. g. ſepties 8, quære in prima columna A B multiplicatorem * 7, deinde in ſerie A C multiplicandum * 8, deſcende in columna* m n, *& ſimul rectà progredere in ſerie* e f, *dum pervenias ad quadratulum commune, in quo reperies Productum quæſitum 56. Sic 7 × 7 = 49, & 4 × 6 = 24 &c. Hæc Tabula perfectiſſime memoriæ mandanda. Multos novi in Arithmeticis idcirco hæſiſſe ab ulteriore progreſſu prohibitos, quòd devorare noluerint modicum laborem Tabulam benè perfecte ediſcendi.*

Propositio III. *Theorema.*

§ 24. *Si nota qualiscunque v. g. A* (7, *valens* 70000) *multiplicetur per aliam B* (6, *cujus valor* 600) *monade altiorem: ſufficit ad Productum habendum, ſumere ex Abaco Pythagorico nota A multiplum per notam*

			C	A			
.	,	,	7	0	0	0	0
					B 6	0	0
4	2	0	0	0	0	0	0

§ 24. *B indicatum, non ſecus acſi A & B monades forent, & multipli hujus notam (ſi vero multiplum compoſitum foret ex duabus notis, harum ultimam) promovere ad eum gradum notâ A anteriorem, quem obtinet multiplicatrix B.* Obtineat B gradum centenariorum i.e. gradum a monadibus ſecundum; multiplum notæ A per B indicatum ſit 42: dico, ſi hujus multipli nota 2 promoveatur ad gradum ante A ſecundum (ùt vides factum in columna C) haberi verum multiplum de A.

DEMONSTRATUR. Ut habeatur notæ A multiplum per B indicatum, debet A promoveri ad eum locum, in quo valeat centies plus, ibique accipi ejus ſextuplum. Sed ut valeat centies plus, debet poni in C, loco Millio-
* § 6. num*; ejus ſextuplum vero conficitur ex 42
Cor. 3. Millionibus, non ſecus ac ſimplicis 7 ſextuplum
* § 6. ex 42 unitatibus*. Ergo hæ notæ 42 dicto
Cor. 4. loco collocatæ efficiunt verum multiplum de A. *Q.e.d.*

PROPOSITIO IV. *Problema.*

§ 25. *Multiplicare Numerum A per alium B.*

I. Colloca multiplicatorem B ſub Multiplicando A, ùt dictum in Additione & Subtractione. Et quamvis idem Productum P prodeat, ſive multiplices A per B, ſive B per A, præſtat tamen Numerum minorem ſupponere majori. Subduc lineam. Ultima nota in B, vi-

Exempl. I.

	.	6	4	5	A
			3	2	B
	1	2	9	0	C
1	9	3	5	.	D
2	0	6	4	0	P

delicet 2, ducatur *primo* in Numeri A notam § 25, ultimam 5; Productum (quod in Abaco Pythagorico ſemper reperietur) ſi conſtet unicâ notâ, hanc ſcribe infra lineam in loco monadum; ſi conſtet duabus notis, harum dextimam ſcribe in dicto monadum loco, ſiniſtimam tantiſper mente retine, ſequenti mox producto addendam. *Secundo*, Duc eandem notam (2) in penultimam Multiplicandi notam (4), productum, in Abaco Pythagorico rurſus inveniendum, pone infra lineam in loco decadum, addendo illi notam, ſi quæ mente hucusque fuerit retenta. *Tertio*, eadem methodo operaberis circa Multiplicandi notam 6, eadem ratione circa alias, ubi harum plures fuerint. Atque hic eſt multiplicandi modus, quando multiplicator eſt unica tantum nota. Sin pluribus conſtet, ut in Exemplo I, ſic porro pergitur,

II. Notam multiplicatoris penultimam 3 duc ſimiliter *primo* in Multiplicandi notam monadicam, 2do in decadicam, 3tio in centenariam &c, omnino operando & producta ſcribendo, uti *Num. præced.* præcepimus, id unum duntaxat excipiendo, ut primum productum (ex 3×5) vel hujus producti nota dextima (ubi duabus conſtaret) ſcribatur ſub nota multiplicante, & ſequens productum (ex 3×4) in loco proxime ſiniſtimo, atque ſic deinceps.

III. Si ducendus ſit Zerus in Zerum, vel nota ſignificativa in Zerum, aut Zerus in notam ſignificativam, ſcribitur infra lineam in loco producti 0,* niſi aliquid e præcedente *Ax. 1.

§ 25.

	3 0 4 0 5 0 0
	2 0
	0 0 0 0 0 0 0 0 *a*
Exempl. II.	6 0 8 1 0 0 0 *b*
	6 0 8 1 0 0 0 0 *m*

producto fuerit mente retentum, quod in eo caſu ſubſcribitur. Vide Exemplum II, in quo, brevitatis ergo, meliùs ſcribes productum unicâ lineâ *m*, quam duabus *a*, *b*.

IV. Demum C & D colligantur in unam ſummam totalem, P. P vocatur *productum Totale*, C & D *producta partialia*.

	5 1 0 0 4 6
	7
Exempl. III.	3 5 7 0 3 2 2
	η ζ ε δ γ β α

In Exemplo III. dic: ſepties 6, vel (ſi mavis notam minorem in majorem ducere) ſexies 7 ſunt 42; ſcribe infra lineam in α 2, 4 mente retine. 2*do*, dic: quater 7 ſunt 28, quibus adde 4 mente retentum, fiunt 32; ſcribe 2 in β, 3 mente ſerva. 3*tio*, dic: ſepties 0 vel nihil, eſt nihil; ſed 3, mente retentum, ſcribe in γ. 4*to*, dic: ſepties 0 eſt 0, igitur 0 ſcribe in δ. 5*to*, dic: ſemel 7, eſt 7, igitur 7 ſcribe in ε. 6*to*, dic: quinquies 7 ſunt 35, hujus notam dextimam ſcribe in ζ, ſiniſtimam in η.

DEMONSTRATIO Exempli I. C eſt toties multiplum de A, quoties multiplicator 2 eſt multiplex unitatis: nam A conſtat partibus 600, 40, 5, & ſingularum duplum poſitum fuit debito ſuo loco in C; prout liquet tum ex Abaco Pythagorico, tum ex § 6. Corollario 4. Ergo C continet ipſum A × 2. II. Similiter D eſt toties multiplum de A, quoties multiplicatoris nota altera (3, valens 30) eſt multiplex unitatis; i.e. quævis nota ipſius A, proinde Totum A continetur trigeſies in D *. Ergo D continet A × 30. Adeoque in C & D toties continetur A, quoties B eſt multiplex unitatis. Atqui P = C + D *. Ergo in P to-

* Prop. 3.

* Prop. 1.

ties continetur A, quoties unitas in B; ſive § 26. $P = A \times B$. *Q. e. d.*

SCHOLIA.

§ 26. I. Quò dictorum ratio & veritas magis conſpectui pateat; ponam hîc in expanſo producta partialia ex notis Numeri A ductis in multiplicatorem B. Ex quo etiam vides, poſſe abſolute multiplicationem inſtitui, quin neceſſe ſit notas quaſpiam mente retineri: qua quidem methodo operatio egregie facilitatur, at ſimul in ſcribendo prolixior redditur.

```
  6 4 5 A
    3 2 B
---------
    1 0 .
    8 .
  1 2 . .
---------
    1 5 .
  1 2 . .
1 8 . . .
---------
2 0 6 4 0
```

II. Patet, in praxi poſſe omitti (vide Exempl. I.) punctum in D; quandoquidem præcedentes notæ in Additione nacturæ ſunt debitum locum & valorem.

III. Si in Multiplicando aut multiplicatore plures Zeri occupent poſteriora loca, brevius ſic operabere: negligantur tantiſper Zeri,

```
2 0 0 0 0          2 3 0 0 0
2 4                4 2 0 0 0
---------          ---------------
4 8 0 0 0          4 6
Exempl. IV.        9 2            Exempl. V.
                   ---------------
                   9 6 6 0 0 0 0 0 0 0
```

(quandoquidem hi nihil multiplicant) & operatione per ſolas notas ſignificativas abſolutâ, adjiciantur producto omnes Zeri tam Multiplicandi quam multiplicatoris. Vide Exempl. IV, in quo multiplicator ſit 24; & Exempl. V, in quo multiplicandus ſit 23000, multiplicator 42000. Nihil facilius, quam numerum quempiam v.g. 23 multiplicare per 10, 100, 1000 &c. tunc enim Multiplicando adjiciantur tot Zeri, quot ſunt in dictis multiplicatoribus, fietque 230, 2300, 23000. &c.

§ 27. Addo adhuc Exempla quæpiam.

20000	298	8462
100	204	465
2000000	1192	42310
	5960	50772
	60792	33848
		3934830

§ 27. COROLLARIUM. Multiplicatio eſt iterata ejusdem aut notæ aut numeri Additio; nam ut hunc, A 345, multiplices per 2, accipiendum eſt ejus duplum; quod obtinetur, dictum numerum ſibi bis addendo. Multiplicare A per 30 nihil eſt aliud, quam ſumere totius A ad gradum decadicum promoti triplum, quod fit, hunc numerum 3450 ter ſibi addendo. Unde colliges, poſſe Multiplicationem ſola Additione abſolvi, quod tamen operoſius fiet, quam per modos hucusque traditos: compendium autem in hoc genere & egregios uſus præſtabunt Tabellæ Neperianæ, de quibus alibi.

§ 28. EXAMEN Multiplicationis certum fit per diviſionem, dividendo Productum totale per multiplicatorem; Quotus erit ipſe Multiplicandus, niſi erratum fuerit; ùt demonſtrabitur Propoſit. 10. Fallit hîc iterum Examen per abjectionem Novenarii.

ARTICULUS VI.

De Diviſione.

§ 29. DEFINITIO I. *Dividere* Numerum A per B, eſt invenire numerum C, qui exprimat, quoties B con-

Exempl. I. A 12 | C 4
B 3 |

tineatur in toto A. Numerus A dicitur *Dividendus*, B *Diviſor*, C *Quotus* ſeu *Quotiens*. § 30.

§ 30. Dicta Definitio locum tantùm habet tunc, cùm totus diviſor continetur in Dividendo, atque huic aut æqualis aut eo minor eſt. At non inſolens apud Mathematicos eſt, minorem numerum dividi per majorem in certas tamen partes diſtributum. Unde ſub generaliore conceptu Dividere A per B eſt invenire C, qui doceat, quoties & quomodo aut totus B, aut hujus determinata pars contineatur in A. Sic dum dividis 2 per 3, vel lineam A per B,

A ı—ı—ı quotus erit $\frac{2}{3}$, h. e. in A conti-
B ı—ı—ı—ı nentur ipſius B nonniſi duæ tertiæ.

Vel (ut cum aliis univerſaliter definiamus Diviſionem) Dividere A per B, eſt invenire numerum C, qui ita ſe habeat ad unitatem, ùt Dividendus A ad diviſorem B; quare cùm in dato mox Exemplo dividendus A ſe habeat ad diviſorem B, ùt 2 ad 3, adeoque ùt pars ad unitatem, quotus id exprimens non poterit eſſe numerus integer, ſed fractus $\frac{2}{3}$, oſtendens habitudinem ipſius A ad B.

§ 31. DEFINITIO II. Omnis numerus B, qui continetur in alio A, hunc adæquare poteſt vel omnimode, vel proxime. *Omnimode adæquat*, ſi ſumptus ſemel aut pluries, puta vel bis, vel ter &c, ita exhauriat numerum A, ut nihil ejus remaneat, prout fit in Exemplo I; quo caſu dicitur etiam numerus B *metiri* numerum A. *Proxime adæquat*, ſi ſemel aut pluries acceptus exhauriat ita numerum A, ut aliquid hujus remaneat, in quo tamen reſiduo nequeat amplius contineri integer numerus B. Sic in Exemplo II. B proxime adæquat ipſum A.

A 14	C 4	Exempl. II.
B 3		

§ 32. § 32. DEFINITIO III. Porro numerus B dicitur contineri in A ſemel, bis, ter, quater &c. Si B acceptus ſemel, bis, ter, aut quater &c. exhauriat numerum A vel omnimode vel proxime. Unde (vide Exempl. I. & II.) ſi B acceptus quater adæquet ipſum A; B continebitur in A quater, & quotus erit 4. Quare ſi volueris noſſe, quoties numerus B contineatur in altero; hunc B toties multiplica, donec adæquet Dividendum vel omnimode vel proxime; & multiplicator, id efficiens, erit ipſe Quotus.

COROLLARIUM. Patet exinde, ſi Dividendus (v.g. 72) & diviſor (9) contineantur in Tabella Pythagorica, quotum (8) in eadem repertum iri.

Præterea ſi diviſor B ductus in 4 (vide Exempl. I & II) ſubtrahatur ex A ita, ut remaneat vel nihil ipſius A, vel ſaltem talis numerus, in quo non amplius contineatur integer B; 4 erit verus quotus: evidens namque eſt, quòd res quæpiam B toties contineatur in A, quoties ex hoc poteſt ſubtrahi.

§ 33. *Signum Diviſionis ſunt duo puncta* (:) *ſic* 6 : 2 *ſignificat Quotum, qui reſultat, dum* 6 *dividitur per* 2. *Hunc quotum ſi ames explicite apponi, ſic ſcribes,* 6 : 2 = 3. *Algebraiſtæ diviſionem etiam ita ſignant* $\frac{a}{b}$; *item* $\frac{a \times b}{n \times b}$; *quo ſignificatur quotus reſultans ex diviſione ipſius* a *per* b, *item ipſius* a×b *per* n×b.

AXIOMATA.

§ 34. I. Nulla unitas, nec ullus numerus continetur in o, ſeu nihilo. § 34.

II. Contentum nequit eſſe majus continente. Neque ullus numerus continetur in quantitate ſe minore.

III. Quantitas A continetur in æquali quantitate B ſemel, eſtque quotus 1.

IV. Si duo numeri æquales dividantur per eundem diviſorem, quoti ſunt æquales.

PROPOSITIO V. *Problema.*

Dividere Numerum datum per alium.

§ 35. PROBLEMA I. *Dividere Numerum A, quando diviſor B conſtat unicâ tantum notâ, v.g. 3.*

Imo. Poſt Dividendum A duc virgulam. 2do.

A 5 1 0 6 | q 1 Si diviſor ſit æqualis primæ
B 3 | Dividendi notæ aut minor

illâ, ſub hac collocatur; ſi major fuerit, collocatur ſub nota ſecunda. Deinde vide, ope Abaci Pythagorici, quoties diviſor contineatur in notis, ſub quibus collocatus fuit: numerus hoc indicans, ſeu quotus (1) ſcribatur poſt virgulam in *q*. 3tio. Duc quotum hunc in diviſorem; productum ſubtrahe ex Dividendi nota vel notis, quibus ſubſtat. Deletisque tum diviſore, tum primâ Dividendi notâ vel duabus, ſi tales adfuerint, reſiduum (2) ſi quod fuerit, ſcribe

2 |
5 1 0 6 | 1
3 |

§ 35. immediate ſupra notam deletam, aut ſi duæ deletæ fuerint, ſuper harum dextimam. Atque hæc eſt prima operatio, cui ſimiles ſunt omnes aliæ ſequentes. Quare II^do. diviſor promoveatur dextrorſum ſub notam Dividendi ſubſequentem (1); vide quoties contineatur in 21, quotum 7 ſcribe poſt quotum antea inventum. Duc quotum novum 7 in diviſorem 3, & productum ſubtrahe ex membro 21, delens ſimul tam 3 quam 21. III^tio. Promoveatur rurſum diviſor; & collocabitur infra notam 0; in qua quia non continetur, & quoties ita non continetur, ſcribitur in loco quoti 0. Deleatur diviſor; promoveatur ad notam ſequentem 6, fiatque operatio, ut ſupra. Prodibit demum quotus Totalis 1702, ſtabitque ſub finem operationis Exemplum, prout in appoſito Schemate comparet. De reſiduo, quod ſæpe ſub finem operationis manet, dicemus § 38. Num. VII.

~~2~~
~~5~~ 1 0 6 | 1 7
~~3~~ 3 |

~~2~~
~~5~~ ~~1~~ ~~0~~ ~~6~~ | 1 7 0 2
~~3~~ ~~3~~ ~~3~~ ~~3~~ |

§ 36. PROBLEMA II. *Dividere Numerum datum, quando diviſor pluribus conſtat notis.* Id duobus potiſſimum modis fieri ſolet, quorum primus eſt quidem communior (congruens prorſus cum mox dato, § 35.) ſed & intricatior; alter planior, & faciendæ Demonſtrationi accommodatior, quemque priori præfero. Utrumque damus.

MODUS PRIMUS. § 36.

Sint dividenda 288612 per 36; ſubſcribe diviſorem primo diviſionis membro 288, accipiendo pro primo membro totidem notas primas ſiniſtimas, quot diviſor habet; excipe, cùm diviſor fuerit major dictis notis, tunc enim altera Dividendi nota erit adjicienda ad habendum primum membrum, ut in præſenti Exemplo fit. Vide jam, quoties diviſor contineatur in membro primo 288, quotum 8 ſcribe poſt virgulam; dein multiplica diviſorem per quotum, ſubtrahe, dele in hunc modum: dic, Ter 8 ſunt 24, hæc ſubtracta ex 28 relinquunt 4, quæ ſcribe ſupra 8, delens interim notas 3, 28, ùt videre eſt in Schemate A.

Schema A.

4
288612 | 8
36

Similiter dic, ſexies 8 ſunt 48, hæc ſubtracta ex 48 relinquunt nihil, deletis interea 6, 48, ùt vides in Schemate B.

Schema B.

4
288612 | 8
366
3

Secundo, Promove diviſorem ità, ut hujus nota dextima ſtet uno gradu propior verſus dextram, ùt apparet in Schemate B; & quia 36 in 6 non continetur, ſcribe Zerum poſt quotum antea inventum. *Tertio*, Promoto rurſus, ùt ante, diviſore quære membri 61 quotum (1,) ſcribendum poſt 0; operare ſecundùm hactenus dicta, dicendo, ter 1 eſt 3, quod ſubtractum ex 6, relinquit 3, delens interim tam diviſoris notam 3, quam Dividendi notam 6, ſupra quam ſcribe reſiduum 3. Similiter dic, ſexies 1 eſt 6, quod

§ 36. ſubtractum ex 31 (dele interim 3, & 1) relinquit 25, quod reſiduum ſcribitur ſupra deleta 31. *Quarto*, Promoto denuo, ùt antè, diviſore operare ſecundùm hactenus præcepta; ſtabitque ſub finem operationis Exemplum, velut in Schemate C cernis.

Schema C.

```
   24
  4 35
 288612 | 8017
  36666
   333
```

MODUS SECUNDUS.

Sit in Exemplo III. Dividendus A, diviſor D, qui pro lubitu ſcribi poteſt vel à fronte vel alibi, ubi conſpectui magis pateat.

Exempl. III. & IV.

Exempl. III. D. 54

		L, M, N,
A	28529	5 2 8 Q
E	270..	
F	152.	
G	108	
H	449	
I	432	
K	17	

Exempl. IV. D. 54

		L, M, N,
A	28512	5 2 8 Q
E	270..	
F	151.	
G	108.	
H	432	
I	432	
K	0	

I. Accipe pro primo diviſionis membro ex Dividendo tot primas notas ſiniſtimas, quot ſunt in diviſore: ſi tamen illæ efficiant numerum diviſore minorem, adjice adhuc illis ſequentem Dividendi notam: atque ita in noſtro exemplo primum membrum conſtituitur notis 285. Quære quotum, qui cùm ſit 5, ſcribatur poſt virgulam; hunc duc in diviſorem, & productum ſcribe in E: hoc productum mox ſubtrahe ex membro primo, reſiduum 15

ſcribe in F. II. Reſiduo 15 ſubjunge ſe- § 36.
quentem Dividendi notam 2, ut fiat novum membrum (152,) in quo cùm diviſor bis contineatur, ſcribes poſt virgulam & quotum L nunc alterum quotum 2, quem duces in diviſorem, operando omnino ùt ante, ſcilicet 2×54. h.e. G ſubtrahendo ex F, & reſiduum 44 ſcribendo in H, cui adjunge Dividendi notam ultimam, ut habeatur novum membrum, circa quod ſimiliter operare: ac tandem in K remanebunt 17, in Exempl. IV autem, ſimiliter tractato, reſtabit nihil; & Quotus Totalis Q erit L+M+N.

DEMONSTRATIO. Numerus A, ceu Totum, eſt æqualis tribus numeris 28500+20+9, tanquam partibus.

Atqui L (valens hic 500) eſt verus quotus partis vel membri 28500, *per Definit.* 3, eo quod (*ex operatione*) D×L (i.e. 27000) proxime adæquat dictum membrum. 2do. M (valens 20) eſt quotus numeri F, i.e. aggregati ex membri primi reſiduo (ſi quod fuerit) & membro ſecundo. 3tio. N eſt quotus numeri H, i. e. aggregati ex membri prioris reſiduo (ſi quod fuerit) & membro ultimo: nec enim in loco quoti aliæ notæ poſitæ ſunt, quam quæ in diviſorem ductæ adæquarent diviſionis membrum.

Ergo L+M+N, i.e. Q, eſt verus Quotus totius A. *Q. e. d.* His rite perceptis, tuopte ingenio demonſtrabis tum operationem Problematis I, tum illam Modi I, quæ cum præſente quoad ſubſtantiam in idem recidit.

§ 37. §37. *SCHOLION* I. In praxi minime neceſſe eſt ſcribi puncta in E, & F; ſed breviùs operabere ſecundùm adjectum Schema. Dividendi tamen notam, quando novum membrum ingreditur, proderit, ad confuſionem vitandam, ab aliis notis ſequentibus interpoſito puncto ſecernere.

2 8 5. 2. 9	D. 5 4
2 7 0	5 2 8
1 5 2	
1 0 8	
4 4 9	
4 3 2	
1 7	

SCHOLION II. Quoniam potiſſima Diviſionis difficultas verſatur in inveniendo quoto, qui plerumque nonniſi tentando reperitur; juvabit interdum, præſertim in Modo I § 36, ſeorſim, quotum electum ducere in diviſorem, ac videre, utrum productum ita poſſit a ſuo membro ſubtrahi, ut vel remaneat nihil, vel ſaltem numerus diviſore minor; quod dum contingit, certus eſto de veritate quoti. Ad faciliorem quoti inventionem etiam facit, diviſoris compoſiti primam notam apte conferre cum nota prima vel duabus primis membri dividendi; Sic in Modo I ejuſque Exemplo, quære quoties diviſoris 36 nota 3 contineatur in ſupra ſe poſitis 28; invenies quidem novies contineri, at reſpiciens ſequentem diviſoris notam 6, advertes, quòd hæc ducta in 9 plus efficiat, quam ex numero ſuperiore poſſit ſubtrahi; unde pro habendo quoto aſſumenda erit non nota 9, ſed 8. Vel (ut aliam tibi ſuggeram praxin) in Exemplo III, quoniam diviſor 54 haud multum differt a 50, vide quoties 50 contineatur in 285, ſtatim invenies contineri quinquies. Pariter ſi foret dividendi membrum 215, & diviſor 27; cogitabis, 27 haud multum abeſſe a 30, hoc verò in uno centenario continetur ter, & in 200 ſexies, remanentibus adhuc 20, quibus ſi addas dividendi notas alteras 15, videbis in hoc aggregato (etiamſi ex illo ſubduceretur exceſſus, quo peccat) adhuc ſemel contineri diviſorem 27, ita ut verus quotus jam deprehendatur eſſe 7. Eundem quotum erues, ſi perpendas 27 haud multum abeſſe, per exceſſum, a 25.

COROLLARIA & OBSERVATIONES.

§ 38. I. Poſtquam diviſor ſcriptus fuit ſub primo Dividendi membro (quod nunquam debet eſſe minus ipſo diviſore) tot ſequuntur diviſionis membra, quot notæ poſt primum membrum ſuperſtites ſunt in Dividendo. Cùm enim difficillimum ſit ſimul & ſemel invenire totum Quotum, id per partes efficimus dicto modo. *Dices:* At cur non etiam

per partes quærimus, quoties diviſor (repete § 38.
Exemplum III.) contineatur in primi membri notis, 2, 8? Reſp. Ne fiat per plura, quod fieri poteſt per pauciora. Nam 54 nequit ita contineri in 20000 aut in 8000, ut quotus ſit 10000 aut 1000 (aliàs productum ex 54×10000, aut ex 54×1000, ceu contentum, foret majus continente, contra Axioma 2;) unde ſupervacanee in loco quoti ſcriberetur 0.

II. Quando diviſor non continetur in membro ſecundo, aliove ſequente, ſcribendus eſt poſt virgulam Zerus; quò tam ſequentes notæ ſignificativæ, quam præcedentes obtineant debitum ſibi locum & valorem.

III. In diviſione partiali unius membri nunquam poteſt eſſe quotus major novenario; quia alias diviſor ductus in quotum novenario majorem evaderet major ſuo membro dividendo (prout adjecta Exempla docent,) id quod repugnat Definitioni 3, & Axiomati 2.

900	1000×1=1000
1	
89	10×9=90 &c.
9	

IV. Ex Definitione 2. & 3. liquet, reſiduum relictum vel poſt membri particularis diviſionem, vel poſt integram diviſionis operationem neque poſſe eſſe æquale diviſori, neque majus illo: hinc ſi ſecus eveniat, certus eſto te erraſſe. Ad cavendos ejuſmodi errores præſtat ſemper aſſumere quotum majorem quam minorem, quando de ejus veritate dubitatur.

§ 38. V. Diviſio eſt iterata ejusdem numeri (ſcilicet diviſoris) ſubtractio.

VI. Si diviſor v.g. 200 contineat ad dextram Zeros non interruptos; per compendium operaberis, ſi dicti Zeri ponantur ſub ultimis notis Dividendi, & operatio fiat per ſolas notas ſignificativas. Notæ autem Dividendi, quibus ſubſcripti ſunt diviſoris Zeri, nullum conſtituent diviſionis membrum; ſed vel cum ultimi membri reſiduo, vel ſi tale nullum fuerit, ipſæ ſolæ component reſiduum. In appoſito Exemplo dividenda ſunt 32356 per 200, remanebunt 156. Si diviſeris 32256 per 200, remanebunt 56.

x (1
3 2 3 5 6 | 1 6 1
2 2 2 0 0 |

VII. Quando abſoluta operatione remanet in Dividendo reſiduum quodpiam (velut in appoſito Exemplo manet 2, lunulâ ſecernendum ab aliis notis,) ſcribitur poſt quotum linea, ſupra quam ponitur reſiduum, infra diviſor: quo denotatur, quòd, ſi unaquæque reſiduarum unitatum dividatur in tot partes, quot ſunt unitates in diviſore, cuivis unitati diviſoris competant adhuc tot partes, quot indicantur a nota ſupra lineam poſita. Sint 26 floreni, & 4 homines hanc Summam dividentes; competent unicuique 6 floreni, remanentibus florenis duobus, qui quia nequeunt integri inter 4 homines dividi, intelligitur unusquisque reſiduorum florenorum dividi in tot partes (ſcil. in quatuor) quot ſunt homines

(2
2 6 | $6\frac{2}{4}$
4 |

nes dividentes: hoc ſi fiat, perſpicuum eſt, poſſe ulteriùs reſiduum inter 4 homines diſtribui; ac in noſtra quidem hypotheſi cuivis dividentium competent adhuc duæ quartæ unius floreni ſeu medius florenus. Quoti appendix $\frac{2}{4}$ dicitur fractio (de qua plura in Cap. 3) ejuſque numerus inferior denotat, in quot partes diviſa intelligatur una reſidui unitas; ſuperior monſtrat, quotnam dictarum partium accipiantur. § 38.

In gratiam Tironum alia quædam ſubdo Exempla.

```
 23
 181
12932
2401 8(2 |               64(5 |          11   |
869699   | 3579 2/243    2070  | 295 5/7 19046 | 21 146/900
243333   |                777  |          9900 |
 2444    |
  22

7368.8.4 | D. 3004         609834 | D. 5200
6008     |   245 904/3004  52   00 | 117 2434/5200
--------                   ----
13608                       89
12016                       52
--------                   ----
 15924                      378
 15020                      354
--------                   ----
   904                       24
```

PROPOSITIO VI. *Theorema.*

§. 39. *Si quoti notæ illæ, quæ numerum integrum exprimunt, ducantur in diviſorem, & Pro-*

§ 39. *ductio addatur reſiduum (ſi quod fuerit); aggregatum hoc eſt æquale Dividendo. II. Quotus etiam is, cui adhæret fractio, totus ductus in diviſorem reſtituit Dividendum.*

DEMONSTRATUR I. *Pars.*

* § 22. Ax. 3. Cor. $Q \times D = D \times L + D \times M + D \times N$ *. Adde utrique æquationis membro reſiduum K; erit * $Q \times D + K = D \times L + D \times M + D \times N + K$. Subſtitue nunc in poſtremo æquationis membro tribus primis terminis æquales E, G, I (Nam, *ex operatione*, $D \times L = E$, $D \times M = G$, $D \times N = I$); erit $Q \times D + K = E + G + I + K$. Atqui huic poſtremo æquationis membro eſt æquale ipſum

* § 8. Ax. 3.

A	2 8 5 2 9	D	5 4
E	2 7 0 . .		
F	1 5 . 2	M	2 0
G	1 0 8		
H	4 4 9	N	8
I	4 3 2		
K	1 7	Q	5 2 8
		L	5 0 0

* §. 15. Ax. 4. Cor. A *: Ergo etiam $Q \times D + K = A$. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. Quotus, qui eſt numerus Integer, ductus in diviſorem eſt æqualis Dividendo, dempto reſiduo, ſi quod fuerit.

DEMONSTRATUR II. *Pars.*

Totus quotus appoſiti Exempli conſtat ex $a + r$ (i.e. e 6 unitatibus integris, & duabus quartis) Atqui $a \times D = A - R$*; & $r \times D = R$, ut evidens fiet percepto §. 61, qui ab hac materia eſt independens. Ergo totus Quotus ductus in diviſorem eſt æqualis ipſi A. *Q. e. d.*

	(R 2		
A	2 6	*a* 6 *r* $\frac{2}{4}$	
	D 4		

* Cor. præced.

§ 40. EXAMEN Diviſionis certum fit, ducendo Quotum, numero Integro expreſſum, in diviſorem, & Producto addendo reſiduum, ſi quod fuerit; tunc enim hoc Productum aut aggregatum æquale Dividendo, oſtendet operationem legitime peractam. Patet ex Propoſitionis VI. parte prima. § 40.

Sic ſupra in Exemplo IV. Q×D = A, & in Exemplo III. Q×D + K = A, probant Diviſionem recte fuiſſe inſtitutam.

APPENDIX ad CAPUT I.

§ 41. *Qua ratione numeri heterogenei tractandi, breviter nunc docendum.*

I. Si addendi forent numeri heterogenei exiſtentes in tribus appoſitis columnis; collige primùm in unam ſummam infimæ ſpeciei quantitates, ſcil. hîc crucigeros: Summa erit 9. At quia propoſitum eſt infra lineam in loco α eam tantum quantitatem ſcribere, quæ non adæquet unitatem ſpeciei poſitæ in columna β; hinc ſummam 9 divide per 4, eum ſcil. numerum cruciferorum, qui unum baceum efficiat; reſiduum (1) unum ſcil. xrum ſcribe in α, & quotum 2, i.e. duos baceos accenſe baceis in columna β: quorum Summa jam quidem efficit 42; at quia rurſus propoſitum eſt infra lineam in β eos tantum baceos ſcribere, qui florenum (unitatem ſpeciei proxime ſiniſterioris) non adæquent; hinc divide ſummam 42 per 15 (eum baceorum numerum, qui unum Florenum conficiant) reſiduum 12, i.e. 12 baceos ſcribe in β; quotum 2, i.e. duos florenos accenſe florenis columnæ γ. Idem modus ſervandus, dum addenda

	fl.	bac.	xri.
	5.	12.	3
	5.	14.	3
	16.	14.	3
	26.	12.	1
Summa.	γ.	β.	α

§ 41. occurrunt minuta, horæ, dies, anni; aut minuta & gradus; aut perticæ, pedes, pollices, lineæ; aut Libræ, unciæ, drachmæ, grana &c.

II. Si ex *26 flor.* 8 *bac.* 2 *xris* ſubtrahendi forent 7 *floreni*, 14 *bacei*, 3 *xri*; incipe ſubtractionem a columna infimæ ſpeciei, & operare velut §. 16. dictum, eo tantum diſcrimine, quòd unitas (ſi neceſſe fuerit) ex *a* in *b* tranſlata non valeat præciſe decem, ſed numerum æſtimandum pro natura ſubjectorum *a* & *b*. Sic in præſente Exemplo unitas ex *a* in *b* tranſlata valet 4.

fl.	bac.	xri.
26.	*a* 8.	*b* 2
7.	14.	3

III. Reſoluturus ſpeciem ſuperiorem in inferiorem, ut dum noſſe cupis, quot crucigeri contineantur in 10 florenis, multiplica 10 per 60 (nempe per eum cruciferorum numerum, qui unum florenum conflant) provenient 600 xri. Si vixiſti annos 20, invenies omnia vitæ tuæ minuta, ſi annos reſolvas in dies, dies in horas, has in minuta.

IV. Multiplicaturus numeros heterogeneos, multiplica quamlibet ſpeciem ſeorſim, & abſoluta multiplicatione producta reducito ad debitas ſpecies. E.g. Oeconomus expendit quovis menſe 15 fl. 12 albos, 3 xros, quantum expendit per menſes 12? Multiplica ſeorſim quamlibet ſpeciem per 12, producta erunt *a*, *b*, *c*: crucigeros reducito ad albos, hos ad florenos (ope diviſionis traditæ Num. I.) reſidua, ſi quæ ſint, ſcribe infra in cujusvis ſpeciei columna, & Summa omnium erit *d*, *e*, *f*.

fl.	alb.	xr.
15.	12.	3.
a 180.	*b* 144.	*c* 36.
d 200.	*e* 12.	*f* 0.

V. Sint inter 20 homines dividendi Floreni 30 & xri 40; initium diviſionis fiat à ſpecie majori, quotus erit 1 flor. Reſiduum 10 flor. reſolve in ſpeciem minorem florenis adhærentem; reſolutis adde 40 illos *xros*; & Summam porro divide per 20; Quotus dabit unicuique dividentium adhuc 32 xros. Vel (ſi aliter placuerit) heterogeneis ad inferiorem

aut infimam omnium ſpeciem reductis, inſtitue § 42.
diviſionem.

Colligis ex dictis, Multiplicandum & multiplicatorem, Dividendum & diviſorem poſſe eſſe numeros heterogeneos.

CAPUT II.
De Proportione.
ARTICULUS I.
Theoreſis Proportionum.

§ 42. DEFINITIO I. *Pars aliquota* eſt, quæ aliquoties accepta apta eſt metiri ſeu omnimode exhaurire ſuum Totum. Talis eſt reſpectu 12 pars 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 6. *Pars aliquanta* eſt, quæ ſemel aut pluries accepta non metitur Totum. Talis eſt reſpectu numeri 12 pars 5, aut 7, aut 8 &c.

DEFINITIO II. *Similes partes* ſunt, quæ in ſuis Totis eodem modo continentur, adeo ut qualis pars ſui Totius eſt una, talis etiam pars ſui Totius ſit altera. *Similes partes aliquotæ* ſunt, quæ in ſuis Totis æque ſæpe continentur. Tales ſunt 2 & 6 reſpectu Totorum 4 & 12. *Similes partes aliquantæ* ſunt, quæ continent æque multas ſuorum Totorum partes aliquotas. Tales ſunt 9 & 18, reſpectu Totorum 12 & 24, utraque enim continet ſui Totius tres quartas. Tales item ſunt 3 & 6 reſpectu Totorum 5 & 10; utraque enim pars continet ſui Totius tres quintas.

§ 42. DEFINITIO III. *Ratio* eſt duarum ejuſdem generis quantitatum mutua quædam ad ſe habitudo vel ſecundùm æqualitatem, vel majoritatem, vel minoritatem.

In omni Ratione ſunt duo termini, quorum qui primò nominatur & a nobis ad alterum refertur, dicitur *Antecedens*, qui ſecundò nominatur & ad quem prior refertur, *Conſequens*. Rationem deinceps ſignabimus interpoſitis duobus punctis in hunc modum A:B. 2:4, quo denotatur Ratio ipſius A ad B, vel 2 ad 4.

SCHOLION. Dixi, Rationem conſiſtere inter quantitates homogeneas. Etenim cùm in quavis Ratione duo quanta comparentur inter ſe vel ſecundùm æqualitatem, vel majoritatem; patet, ſæpe inepte comparari hoc modo inter ſe quantitates heterogeneas, v.g. Numerum 12 cum circulo, lineam cum ſphæra.

2do. Rationum alia Arithmetica, alia Geometrica. *Arithmetica* eſt comparatio unius quantitatis cum alia ſolùm ſecundùm exceſſum, ſeu differentiam, qua una ſuperat aliam, vel ſuperatur ab illa; qui exceſſus reperitur ſubtrahendo minorem a majore.

Proportio Arithmetica eſt duarum Rationum Arithmeticarum ſimilitudo, ſeu ſeries trium quatuorve quantitatum, in qua major minorem ſuperat eodem exceſſu, ùt 2, 4, 6, vel 8, 6, 4, 2. *Majoris conſiderationis ſunt Ratio & Proportio Geometrica, quæ velut per excellentiam tales dicuntur; ac nos deinceps, niſi aliud expreſſim fuerit additum, Rationis & Proportionis nomine ſemper Geometricas intelligemus.*

DEFINITIO IV. *Ratio Geometrica* eſt, in qua conſideratur, quomodo una quantitas

contineat alteram, aut continetur in illa. § 42.
Ut autem cognoſcas, quomodo numerus in numero contineatur, divide majorem per minorem, quotus id indicans vocatur *Exponens* Rationis; quòd exponat habitudinem unius quantitatis ad aliam.

Ratio alia eſt *Aequalitatis*, cùm Antecedens & Conſequens ſunt æquales, ùt 5 : 5. Alia *Inæqualitatis*, cùm fuerint inæquales: & quidem ſi Antecedens fuerit majus, dicitur *Ratio majoris inæqualitatis*, ùt 4 : 3. Si fuerit minus, *minoris inæqualitatis*.

SCHOLION. Nobis deinceps in Propoſitionibus negotium & ſermo ſemper erit de Rationibus inæqualitatis; nam quæ ibidem aſſerentur, vera eſſe de Ratione æqualitatis, cuivis vel prima fronte patebit.

DEFINITIO V. *Proportio Geometrica* eſt duarum Rationum ſimilitudo, convenientia, æqualitas, identitas (*hæc enim Synonyma hic ſunt*) ſecundùm continentiam: nimirum quando vel Antecedens utriusque Rationis æque ſæpe continet ſuum Conſequens, aut continetur in illo; vel quando utrumque Antecedens continet ſui conſequentis æque multas partes aliquotas ſimiles: quem in finem oportet concipere terminos Conſequentes diviſos in æqualem numerum ſimilium aliquotarum; tum enimvero ſi Antecedentes gaudeant æquali ejusmodi partium numero, Proportio habebitur. Sic Proportionem conſtituunt hæ Rationes 8 : 2, & 24 : 6. item iſtæ 2 : 4, & 3 : 6. item iſtæ *a* 2 : *b* 5, & *c* 4 : *d* 10;

§ 42. uti enim *a* ita & *c* continet ſui Conſequentis duas quintas.

Termini Proportionem conſtituentes dicuntur *Proportionales*. Deinceps Proportio ita a nobis ſignabitur 2 : 4 : : 3 : 6, atque ita enunciatur, ut 2 ſe habet ad 4, ita 3 ſe habet ad 6. Aliis placet hæc ſignatio 2 : 4 = 3 : 6.

COROLLARIUM I. Proportionem conſtituunt unitas, multiplicator, Multiplicandus, & Productum, ita ut ſit 1 : m : : M : P. Patet ex Definit. 1. § 18.

COROLLARIUM II. Proportionem item conſtituunt unitas, quotus, diviſor, Dividendus, ita ut ſit 1 : q : : d : D. Sequitur ex Corollar. præced. quia (ut oſtenſum fuit Propoſ. 6) quotus multiplicans diviſorem producit Dividendum.

SCHOLION. Mox memoratam Proportionem veram etiam eſſe tunc, cùm in diviſione quoto adhæret fractio, inde facile deducitur, quòd, cùm fractionis termini *r* & *d* iisdem notis ſcribantur, quibus

R	2		*r* 2
2	6	6	—
D	4		*d* 4

* § 38, n. 7. reſiduum R & diviſor D*, eodem modo poſſit comparari R ad D tanquam unitatem, quo in Fractione refertur *r* ad *d* ceu unitatem. Quo poſito, uti totus quotus appoſiti Exempli continet ſexies unitatem & inſuper unitatis dimidium; ita Dividendus (qui æqualis eſt 4 × 6 + 2 *) etiam conti- *Prop. 6.
net ſexies diviſorem * & inſuper hujus diviſoris dimidium. Unde etiam pateſcit Diviſionis Definitio generalis, data § 30. * § 32.

DEFINITIO VI. Proportio (tam Geometrica quam Arithmetica) alia *Continua*, in qua medii termini ſunt iidem, ut in hac 2 : 4 : : 4 : 8.

Alia *Diſcreta*, in qua Medii termini ſunt diverſi, ùt 2 : 10 : : 4 : 20. Proportio *Reciproca* (quæ & everſa dicitur) eſt, in qua primus terminus eſt ad ſecundum, uti quartus ad tertium; velut 2 : 6 : : 30 : 10. § 43.

Deinceps ſi quando dicetur terminis genericis A eſſe ad B, ùt C ad D; habendæ clarioris ideæ ergo tu iſtas Rationes tecum ſpeciales reddes, dicendo E.G. ùt A eſt duplum vel triplum de B, ita C eſt duplum vel triplum de D, aut viciſſim.

AXIOMATA.

§ 43. I. Æquales quantitates *a*, *b* dicunt eandem Rationem ad tertiam *z*, vel ad æquales *x*, *z*. Et quantitas *z* dicit eandem Rationem ad æquales *a*, *b*.

a 4. *b* 4
x 2. *z* 2

II. Si *a* & *b* dicant eandem Rationem ad *z*, vel ad æquales *x*, *z*; *a* & *b* ſunt æquales. Et ſi quantitas *z* dicat eandem Rationem ad *a*, *b*, hæ æquales ſunt.

III. Si detur certa Ratio inter quantitates A & B; tunc ſi alterutri ſubſtituas aliam æqualem, manebit eadem, quæ prius, Ratio.

IV. Duæ Rationes A : B, C : D ſimiles tertiæ (*x* : *z*,) vel pluribus ſimilibus ſunt etiam ſimiles inter ſe. *Vel*, Omnes Rationes habentes eundem Exponentem eandemque Antecedentis ad Conſequens relationem, ſunt ſimiles.

A : B, *x* : *z*, C : D
8 : 4, 4 : 2, 6 : 3

V. Si fuerint Rationes A & B æquales, & alterutri ſubſtituas aliam (*c*) ipſi ſimilem; manebit eadem, quæ prius, Proportio; ſimi-

A	B	*c*
1 : 2 : :	5 : 10	6 : 12

§ 43. lesque itidem erunt Rationes A & *c*, vel B & *c*.

VI. Si *a* ſit pars qualiscunque de *b*; tunc *a* duplicatum, triplicatum &c. perget eſſe eadem pars de *b* pariter duplicato aut triplicato &c. Proinde ſi *a* ſit pars tertia de *b*, & utrumque duplicetur in A & B, manebit A pars tertia de B.

a 2. *b* 6
A 4. B 12

COROLLARIUM. Sicut ſe habent ſimpla *a*, *b*, ita ſe habent eorum æque multipla, i.e. eorum dupla aut tripla &c. Unde ſi quantitates *a* & *b* multiplicentur per eandem tertiam *c*, erunt Producta A & B ad ſe invicem uti *a* ad *b*.

a 2. *b* 3
A 4. B 6
C 6. D 9

a 2. *b* 4
c 3
A 6. B 12

a . . b . . .
A : : B : : :

Poteſt, quod in Corollario hoc aſſeritur, independenter a præcedente Axiomate reddi evidens in Schemate adjecto per puncta, numeros repreſentantia.

PROPOSITIO VII. *Theorema.*

§ 44. *Si, datis 4. quantitatibus proportionalibus A: B:: C: D, multiplicentur inter ſe termini extremi (A, D) item medii (B, C); Producta ſunt æqualia, h.e. A×D = B×C. IIdo. Et ſi 4 termini A, B, C, D ita ſint diſpoſiti, ut Productum Extremorum ſit æquale Producto Mediorum, hi 4 termini ſunt proportionales.*

A : B : : C : D
2 : 4 : : 3 : 6

DEMONSTRATUR I. *Pars.* Multiplica § 44.
C & D per A, item A & B per C, ùt fiant A×C, A×D, item A×C, B×C. Igitur erit ùt

A : B : : A×C : B×C*, &
C : D : : A×C : A×D

* *Per Axioma 6. Cùm in multiplicatis per tertium maneat eadem Ratio.*

Sed duæ Rationes A : B, C : D ſunt ſimiles*: ergo etiam ſimiles inter ſe ſunt Rationes A×C: B×C, & A×C : A×D*. Atqui hoc modo quantitas A×C dicit eandem Rationem ad duas B×C, A×D. Ergo hæ ſunt æquales inter ſe**. *Q. e. d.*

* Ex hypotheſi.
* Ax. 4.
** Ax. 2.

DEMONSTRATUR II. *Pars.* Ut C:D:: A×C:A×D*. Sed, ùt ſupponitur, eſt A×D = B×C: ergo, poſtremum priori ſubſtituendo, erit ùt
C : D : : A×C : B×C; & ùt
A : B : : A×C : B×C*. Atqui hoc modo Rationes A : B, & C : D ſunt ſimiles tertiæ (A×C:B×C;) ergo & ſimiles inter ſe*; proinde termini A, B & C, D proportionales, apti hanc conſtituere Proportionem, A : B : : C : D*. *Q. e. d.*

* Ax. 6. Cor.
* Ax. 6. Cor.
* Ax. 4.
* Def. 5.

COROLLARIUM Practicum. *Cognitis tribus terminis proportionalibus A, B, C, invenire quartum proportionalem D.* Duc in ſe medios B et C; & Productum B×C divide per primum A; Quotus erit quartus proportionalis. Cùm enim A ſit diviſor, D quotus; erit Productum ex A×D æquale Dividendo B×C*. Quare cùm termini A, B, C, D ſint ita

A : B : : C : D
2 : 4 : : 3 : 6

* Prop. 6.

§ 45. diſpoſiti, ut Productum Extremorum ſit æquale Producto Mediorum, erunt hi proportionales.

Hic modus inveniendi terminum 4tum proportionalem vocatur Regula Proportionum, alio nomine Regula Trium vel De-Tri, & ob inſignem uſum Regula aurea.

PROPOSITIO VIII. *Theorema.*

§ 45. *Si fuerint tres Numeri continue proportionales (A, B, C), Productum Extremorum eſt æquale Quadrato Medii.*

A : B : C
2 : 4 : 8

* Def. 6. DEMONSTRAT. Quia eſt ùt A:B :: B:C*; * Pr. 7. erit A×C = B×B*. Sed B×B eſt Quadra- * § 20. tum * Medii. Ergo. *Q. e. d.*

COROLLARIUM I. Si quæ quantitas B ducta in ſe ipſam efficiat Productum æquale Producto Extremorum A, C; erit hæc Media proportionalis, eo quod, *per Prop.* 7. *part.* 2, tunc ſit A : B :: B : C,

COROLLARIUM II. Practicum. *Poſitis & cognitis duobus numeris A, B, invenire tertium proportionalem C.* Duc ſecundum B in ſe ipſum, Productum B×B divide per primum A; Quotus C dabit petitum. Nam cùm ſit * Pr. 6. A×C = B×B*, erit A:B :: B : C.**
** Pr. 7. p. 2.

COROLLARIUM III. Practicum. *Inter duos numeros A, C invenire Medium proportionalem B.* Duc A in C, ex producto A×C extrahe (ſi fieri poteſt) Radicem quadratam, ùt docebitur Cap. 4; hæc erit Medius proportionalis. Nam cùm omnis Radix in ſe ipſam ducta efficiat Productum, e quo fuerat extra-

ɾta, erit hæc, *per Coroll.* 1, numerus Medius proportionalis. § 46.

Dixi: ſi fieri id poſſit: nam ſi Productum A × B fuerit numerus exactè Quadratus, invenietur verus Medius proportionalis; ſi non fuerit exactè quadratus, Medius proportionalis nonniſi proxime reperietur, ùt declarabitur ſuo lòco.

PROPOSITIO IX. *Theorema.*

§ 46. *Si fuerint 4 numeri proportionales A, B, C, D; vera erunt circa illos ſequentia.*

A		B		C		D
6	:	2	: :	9	:	3

I. Erit etiam *invertendo* (nimirum Antecedens vertendo in Conſequens) B : A : : D : C.

DEMONSTRATIO. Datâ hac Proportione A : B : : C : D, æqualia ſunt Producta B×C, A×D*: ſed ſi termini invertendo ita diſponantur B, A, D, C, iterum ſunt æqualia Producta Extremorum & Mediorum, utpote non diverſa a prioribus*: ergo & hi termini invertendo poſiti ſunt proportionales*.

* Pr. 7. * § 22. Ax. 4. * Pr. 7. p. 2.

II. Erit etiam *commutando*, ſeu Rationes tranſponendo, ùt C : D : : A : B. Eſt per ſe evidens ex Defin. 5.

III. Erit etiam *alternando* & comparando Antecedens cum Antecedente, Conſequens cum Conſequente, A : C : : B : D.

DEMONSTR. Datâ & ſuppoſitâ hac Proportione A : B : : C : D, æqualia ſunt A×D & B×C vel C×B*. Ergo ùt A : C : : B : D**. *Q. e. d.*

* § 22. Ax. 4. ** Pr. 7. p. 2.

COROLLARIUM. Ut ad ſe invicem ſunt partes ſimiles B & D, ita ſunt inter ſe Tota ſi-

§ 46. milia A & C. Cùm enim ſit pars B ad Totum A, ùt pars D ad Totum C*; erit etiam alternando ùt pars ad partem, ita Totum ad Totum, & viciſſim.
* Def. 2.

IV. Erit etiam *componendo*, ſeu addendo, ùt A+B : B :: C+D : D.

DEMONSTR. Productum Extremorum (A+B)×D eſt æquale Producto Mediorum (C+D)×B. Ergo proportionales ſunt A+B : B :: C+D : D*. *Probo Antecedens*: Cùm, ùt ſupponitur, ſit A : B :: C : D, erit A×D = B×C; quorùm utrique ſi addas partem communem B×D, erit A×D + B×D = B×C + B×D*. Atqui (A+B)×D eſt æquale τῷ A×D+B×D, & (C+D)×B τῷ C×B+D×B*. Ergo etiam &c.
* Pr. 7. p. 2.
* § 8. Ax. 3.
* § 22. Ax. 3. Cor.

V. Erit etiam *dividendo* (ùt Antiqui loquebantur) ſeu potius ſubtrahendo, ùt A−B : B :: C−D : D.

DEMONSTR. Quia B & D ſunt ſuorum Totorum partes ſimiles, utrumque v. g. pars tertia; clarum eſt, Tota A & C hac parte mulctata mutari in alia Tota, adhuc ſimilia & dicentia eandem Rationem ad ſuas partes B & D. Sic ſi ex hujus Proportionis (30 : 8 :: 15 : 4) Antecedentibus ſubtrahas Conſequentes, quilibet Antecedentium, qui antè continebat Conſequentis 15 quartas, nunc continebit ejusdem 11 quartas, adeoque manet Proportio *.
* Def. 5.

VI. Si fuerint plures numeri proportionales *a* : *b* :: *c* : *d* :: *e* : *f*, hoc eſt, ſi ùt eſt *a* ad *b*, ita ſit *c* ad *d*, & ùt *c* ad *d*, ita *e* ad *f* &c. erit etiam ùt unum Antecedentium ad ſuum Con-

ſequens, ita tota ſumma Antecedentium ad totam ſummam conſequentium; proinde $a + c + e : b + d + f :: a : b$, vel $c : d$. § 47.

DEMONSTR. Productum Extremorum $(a + c + e) \times b$, vel, *per* § 22. *Axioma.* 2 *Coroll.* $a \times b + c \times b + e \times b$, eſt æquale Producto Mediorum $(b + d + f) \times a$, vel $a \times b + a \times d + a \times f$. Ergo datur dicta Proportio. *Probo Antecedens:* Quia eſt $a : b :: c : d$ & $a : b :: e : f$*, erit $a \times d = b \times c$, & $b \times e = a \times f$, unde patet, prædicta Producta eſſe æqualia nimirum $a \times b + c \times b + e \times b$ et $a \times b + a \times d + a \times f$ *ex hyp.

PROPOSITIO X. *Theorema.*

§ 47. *In omni Multiplicatione ſi Productum* P *dividatur per multiplicatorem* m, *Quotus* Q *eſt æqualis Multiplicando* M.

DEMONSTRATUR. In multiplicatione quavis eſt ùt 1 : m :: M : P*: & in diviſione ùt unitas ad Quotum, ita diviſor ad Dividendum, & *alternando* ùt unitas ad diviſorem, ita Quotus ad Dividendum. Unde hæ ſtabunt Proportiones 1 : m :: M : P. Et ſi dividas P per *m*, erit 1 : m :: Q : P. Ergo Rationes M : P & Q : P ſunt ſimiles*, atque in his Q & M æqualia*. *Q. e. d.*

M	24
m	2
P	48

* § 18. 19.
* Ax. 4.
* Ax. 2.

§ 48. PROPOSITIO XI. *Theorema.*

§ 48. *Si numeri A B dividantur per eundem x; erunt Quoti C, D proportionales ipſis A, B, ita ut ſit A : B : : C : D.*

A. C	B. D
24 (8	12 (4
x 3. 1	x 3. 1

DEMONSTRATUR. Eſt $1 : x : : C : A$; & ùt $1 : x : : D : B$. Ergo Rationes $C : A$, $D : B$ ſimiles tertiæ $(1 : x)$ * Ax. 4. ſunt etiam ſimiles inter ſe *; & *alternando* ùt $C : D : : A : B$, & *commutando* ùt $A : B : : C : D$. *Q. e. d.*

ARTICULUS II.

Applicatur præcedentium Theoria ad praxin.

§ 49. Ut datis ſeu cognitis tribus terminis proportionalibus inveniatur quartus, hæc Regula ſit inſtar omnium: Diſponantur termini eo ordine, ut quomodo ſe habet primus ad ſecundum, ita tertius ſe habeat ad quartum quærendum. Sic

I. Quia plerumque duo pretia ſunt, uti quantitates mercium aut ponderum; item duæ mercedes, uti quantitates laborum vel temporum labori deſtinatorum; duo item effectus æqualium cauſarum, uti tempora quibus agunt; duo pariter effectus cauſarum diſſimilium, uti intenſiones cauſarum eodem tempore; aut æqualium ſortium lucra vel uſuræ, uti tempora, & pro ratione ſortium ipſa lucra æqualium temporum: hinc ſi noſti Rationem E.G. Pretii unius ad alterum, innoteſcet etiam e mercium una merx altera,

&

& viciſſim. Emo E. G. duobus florenis 12 panes, octo florenis quot emo panes? erunt nimirum ùt 2 floreni ad 8 florenos, ita 12 panes ad incognitum numerum ſeu quartum proportionalem, quem invenies (*per Propoſ. 7. Coroll.*) hac adjutus Regula, quæ dicitur Regula Proportionis directæ: § 49.

* *Duc tertium in medium, Productum divide primo.* * Regula Proportionis directæ.

Nempe diſpoſitis ita terminis 2 : 8 :: 12, multiplica 12 per 8, & productum divide per primum 2, Quotus 48 dabit quartum proportionalem. Et quia ex Propoſit. 9. manet Proportio alternando terminos ✱, eundem quartum proportionalem erues dicendo, ùt 2 floreni ad 12 panes, ita 8 floreni ad panes 48. Nimirum, in ſimilibus omnibus exemplis quantò major aut minor eſt terminus primus ſecundo, tanto major aut minor eſt tertius quarto.

Regula Proportionis inverſæ.

Hæc Proportio ſi quando invenitur everſa & reciproca, v. g. ſi, quanto major eſt primus ſecundo, tanto minor ſit tertius quarto; diſponendi ſunt termini in Proportionem ordinatam & directam, nimirum ut primus ſit ad ſecundum, prout tertius eſt ad 4tum; ac tunc operaberis ùt ante.

E.g. 36 Operarii abſolvunt certam foſſam diebus 4, 50 operarii quot diebus eandem abſolvent? Quartum terminum incognitum, dum inveniatur, vocabimus interim x. Jam ſi bene expendas terminorum Rationem & Proportionem, advertes,

---

✱ *Ne videamur in propoſita alternatione agere contra Scholium Definit. III. § 42, ſciendum, quamvis floreni & panes ſint heterogeneæ indolis ſecundùm Rationem monetæ & cibi, eſſe tamen homogenea ſecundùm Rationem abſtractam Numericam, cui cùm phyſice reſpondeat certa quantitas monetæ aut cibi, etiam hæc velut per concomitantiam eruitur.*

§ 49. quòd nequaquam, uti hîc 50 operarii numero ſuperant operarios 30, ita tempus operariorum 50 ſuperet tempus operariorum 30: minore namque tempore indigent operarii plures (50,) quam pauciores (30). Et quidem quo plures accedunt operarii, eo tempus x evadit minus tempore dato, & contrà tempus datum fit eo majus tempore x. Ecce nunc Proportionem directam, in qua quo major numerus 50 numero 30, eo tempus 4 dierum majus tempore x: applicatâ igitur Regulâ Proportionis directæ erit $50 : 30 :: 4 : 2\frac{20}{50}$. Ubi nota: ſi quando in terminorum diſpoſitione directa x conſiſtat extra locum ultimum (ùt in hac $30 : 50 :: x : 4$, quæ etiam vera eſt in noſtro caſu;) *invertendo* terminos, illico x ſtatuetur in loco poſtremo. *Aliud Exemplum*: Quando Modius tritici venditur 3 Imperialibus, panis uno baceo emptus pendit 24 uncias; quot unciarum erit panis ejusdem pretii, cùm Modius venditur 2 Imperialibus? ℞. 36 unciarum. Nempe quantùm decreſcit pretium Modii, tantùm creſcit pondus panis: unde proportio inverſa enaſcitur, quæ in ordinatam directam digeſta hos habet terminos, $2 : 3 :: 24 : 36$. *Ad eundem modum* ſolvitur ſequens Quæſtio: 3 canales æqualiter fluentes implent certum vas intra 12 horas; intra quot horas idem implebunt 5 ſimiles canales? ℞. ùt 5 ad 3, ita 12 ad $7\frac{1}{5}$. *Item* 4000 Militibus ſufficit ad tempus annuum ſeu 12 menſium annona in urbe præſens; quodſi 2000 accedant, quanto tempore nunc annona ſufficiet præſidio? ℞. ùt 6000 præſidiarii ad 4000, ita 12 menſes ad $x = 8$. *Aliud Exemplum*: Pes Romanus antiquus eſt ad Pariſinum ùt 132 : 144, adeoque minor iſto; quæritur, cùm 5000 pedes Romani faciant unum Milliare Italicum, quot pedes Pariſini efficiant idem Milliare? Conſtat, pauciores Pariſinos requiri, unde falſa foret hæc Proportio $132 : 144 :: 5000 : 5454$ &c. vera autem iſthæc: $144 : 132 :: 5000 : 4583\frac{48}{144}$.

EXAMEN Operationis juxta Regulam auream inſtitutæ fit, ducendo terminum primum in quartum, & ſecundum in tertium;

Producta æqualia probant operationem legitime factam: patet ex Propoſ. 7. p. 1. § 49.

II. Cùm termini dati vel cogniti ſunt plures quam très, videl. 5 aut 7 aut plures; Regula hîc adhibenda dicitur *Compoſita*, reſpectu cujus ſuperiores dicuntur ſimplices. Exemplum hoc ſit: 8 Mercatores 1000 aureis (quos quisque ſingillatim confert) lucrantur 700 aureos; 10 Mercatores 4000 aureis quot lucrantur? Duc 8 in 1000, item 10 in 4000, ut oriantur 8000 & 40000; & operare, velut Numero præcedente, in hunc modum, 8000 : 700 : : 40000 : 3500. RATIO: quia manet æquivalenter eadem, quæ prius, Quæſtio, ſi dicas, 8000 aureorum Mercator lucratur 700 aureos, 40000 aureorum Mercator quot lucrabitur?

Regula Proportionis compoſitæ.

Aliud Exemplum: 10 plauſtra vecta per 9 milliaria abſumunt 50 Imperiales; 24 plauſtra vecta per 15 milliaria, quid abſumunt? ℞. Duc 10 in 9, & 24 in 15, ac dein operare ſimpliciter directe, ùt Num. 1, atque emerget hæc Proportio, 90 : 360 : : 50 : 200. Eodem modo ſolves alia ſimilia Problemata.

Quanquam & ſolvi poſſint per Regulam ſimplicem bis vel ter applicatam. E.G. in dato mox Exemplo ita: *Primo*, 10 dant 50, quid 24? fient 120: *Secundo*, 9 dant 120, quid 15? fient 200. Nempe ùt 10 plauſtra ad 50 Imperiales, ita 24 plauſtra ad 120 Imperiales (ex hypotheſi, quòd nonniſi per 9 milliaria vehenda ſint). Porro ùt 9 milliaria ad 120 Imperiales (ex hypotheſi, quòd 24 plauſtra vehenda ſint) ita, in eadem hypotheſi, 15 milliaria ad 200 Imperiales. In hoc Exemplo, 700 aurei 4 annis præbent lucrum 1400 aureorum; 6000 aurei quantum lucri dabunt intra 20 annos? licebit hunc in modum procedere per binam operationem ſimplicem: dic, ſi 700 aurei (ſupponendo, eos ex-

§. 49. poni per 4 annos) acquirunt 1400 aureos, quid intra idem tempus acquirent 6000 aurei? ℞. 12000. Porro ut 4 anni (ex hypotheſi, 6000 aureos exponi) important 12000 aureos, ita 20 anni aureos 60000.

Subjungo Exemplum adhibendæ Regulæ Compoſitæ, ubi Proportio inverſa occurrit. 10 Meſſores intra dies 12 demetunt jugera 30; meſſores 20 intra quot dies demetunt jugera 40? Quæſtio hæc optime ſolvitur bina operatione ſimplici. *Primo*, 10 meſſores requirunt 12 dies (ſubintellige ad jugera 30) 20 meſſores quot dies requirunt ad eadem 30? ℞. 6*. *Secundo*, 30 jugera (dum 20 meſſores laborant) poſtulant dies 6; 40 jugera (dum iidem laborant) quot poſtulant dies? ℞. 8.

* Per Num. 1.

Regula Societatis.

III. REGULA SOCIETATIS commune damnum, vel lucrum, vel debitum inter plures diſtribuit ſecundùm proportionem quantitatis a ſingulis collatæ. E.G. Tres Mercatores inita ſocietate lucrati ſunt 200 aureos: Mercator A contulit aureos 300, B 210, C 90; quantum cuique lucri debetur? ℞. Fac aggregatum omnium collatorum, quod erit 600; dic, 600 dat lucrum 200 aureorum, quale dat A 300? ℞. 100. Deinde, 600 dat lucrum 200, quid B 210? ℞. 70. Demum, 600 dat lucrum 200, quale dat C 90? ℞. 30. Ut enim 600:200::300:100; & ſic proportionaliter de aliis. Signum operationis bene inſtitutæ eſt, ſi termini omnes inventi ſimul ſumpti adæquent datum numerum lucri vel debiti.

Aliud Exemplum, in quo occurrit proportio compoſita. Tres lucrati ſunt Florenos 80: Primus contulit florenos 20 per menſes 3, ſecundus fl. 40 per menſes 4, Tertius fl. 50 per menſes 5. Quantum

cuique debetur? Duc cujuslibet ſummam in tempus ſuum, tria producta (60, 160, 250) adde in unam ſummam 470, & ſic procede: 470 dant 80, quid 60? quid 160? quid 250? Provenient $10\frac{100}{470}$, $27\frac{110}{470}$, $42\frac{260}{470}$. RATIO: Quia hoc modo manet æquivalenter prior quæſtio & collatorum valor: nam quod primus contulit, æquivalet Summæ 60 florenorum uno menſe expoſitorum, & quod ſecundus contulit, ſummæ 160 florenorum uno menſe expoſitorum, &c. Ac tribus hiſce Summis reſpondet intra unum menſem lucrum 80 florenorum; hoc autem rite diſtribuitur ſecundùm inſtitutam operationem. § 49.

IV. REGULA FALSI, vel potius ſuppoſitionis, docet non inquirere falſum, ſed ex poſitione numeri, qui putatur Quæſtioni ſatisfacturus, invenire numerum Quæſtionis verum, eo quod poſterior eandem Rationem habeat ad ſuum Quæſtionis terminum, quam prior ad ſuum. Collocatur primo loco numerus ſuppoſititius, ſecundo hypotheſis, tertio numerus in quæſtione notus. Regula Falſi.

E.G. Tres debent 2700 aureos, ita ut ſecundus debeat duplum primi & tertius duplum ſecundi; quantum proinde debent ſinguli? Suppone primum debere unum aureum, debebit ſecundus 2 aureos, tertius 4, ſumma omnium erit 7. Unde dices, ùt ſe habet ſumma 7 ad 1, ita ſumma 2700 ad 385[r]. Hunc inventum duplica, & habes debitum ſecundi; hujus duplum dat debitum tertii.

De Regula duplicis Poſitionis, Alligationis, Mixti &c dicere, præfixa operi brevitas vetat; nec conſultum judico, hic loci talia pertractare. Suaſerim potius Tironi, ut tempus, quod iſtis perdiſcendis impenſurus eſſet, tribuat Algebræ ſtudio; tum enim clavem nanciſcetur univerſalem ad reſolvenda omnia Problemata, cùm in dictis Regulis evolvendis nonniſi particularem, & quidem ſatis operoſe, inventurus ſit ad pauciora patefacienda.

§ 50.

CAPUT III.

De Numeris Fractis Vulgaribus, & Decimalibus.

ARTICULUS I.

De Fractionibus vulgaribus.

Solent Tirones Fractionum doctrinam neſcio quàm arduam ſibi efformare, ſeu veriùs fingere. Nibil illæ difficultatis involvunt, modò rite penetrentur earum Definitio & Proportionum natura Demonſtrationibus applicanda.

§ 50. DEFINITIO I. *Numerus Integer eſt*, qui componitur ex pluribus unitatibus indiviſis, ſeu talibus, a quarum partibus abſtrahitur.

DEFINITIO II. *Numerus Fractus* eſt pars vel partes alicujus unitatis aut Totius, in plures partes æquales diviſi. Ut ſi Florenus tanquam unitas aut Totum intelligatur in 60 æquales partes, h.e. in 60 crucigeros diviſus; tum enim harum partium una, vel aliquot, v.g. 30, ſunt numerus Fractus, qui interpoſitâ lineolâ ſic ſcribitur $\frac{30}{60}$. Nimirum Inferior numerus vocatur *Denominator*, indicans, in quot partes diviſa ſit unitas aut Totum. Superior dicitur *Numerator*, quia numerat & indicat, quotnam partes accipiantur ex iis, in quas unitas eſt diviſa. Sic autem enunciantur: $\frac{1}{2}$, ſemiſſis vel dimidium; $\frac{4}{5}$, quatuor quintæ; $\frac{12}{17}$, duodecim decimæ ſeptimæ &c.

§ 51. COROLLARIUM I. Si habeatur hæc Fractatio $\frac{3}{3}$, vel $\frac{4}{4}$, vel $\frac{13}{13}$ &c. in quibus

Numerator eſt æqualis Denominatori; evidens eſt ex parte Numeratoris accipi unitatem integram, idque per Axioma 1. § 8. § 51.
II. Si ponantur Fracti hi $\frac{1}{3}$, $\frac{6}{10}$, &c, in quibus Numerator eſt minor Denominatore, accipitur pars unitatis, non unitas ipſa Tota. III. Si hi, $\frac{4}{2}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{20}{10}$ &c. in quibus Numerator major eſt Denominatore; patet, plus accipi quàm unitatem, imo deſignatur hîc accipi duas unitates integras. Et hæc fractio, $\frac{5}{3}$, notat, accipi hîc unum totum (ſcilicet unitatem in tres partes diviſam) ac inſuper duas tertias. Fractiones, in quibus Numerator eſt minor Denominatore, vocantur *Propriæ*; aliæ dicuntur ſpuriæ aut *impropriæ*; proprie autem ſic foret poſterior exprimenda $1\frac{2}{3}$; diciturque nunc numerus *mixtus*, nempe ex integro & fracto.

§ 52. COROLLARIUM II. In omni Fractione Fractus eſt ad unitatem, ùt Numerator ad Denominatorem: patet ex ipſa Definitione. II. Duæ ejusdem Denominationis fractiones ſunt ad ſe invicem ſicut Numerator ad Numeratorem. Sint c duæ quartæ, d tres quartæ; perſpicuum eſt eſſe A ad B, ùt 2 : 3. III. Si fractiones A & B habeant eundem Denominatorem; Fractio A eſt major Fractione B, ſeu majoris valoris, ſi Numerator a ſit major Numeratore b: nam illud plus valet, quod ejusdem Totius æqualiter diviſi plures partes conti- § 52.

$$\left\{ A\ c\,\frac{2}{4}\ .\ B\ d\,\frac{3}{4} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} A & . & B \\ a\,\frac{4}{6} & . & b\,\frac{2}{6} \end{matrix} \right.$$

§ 52. net. Atqui. Ergo. E contra Fractio illa minor, cujus numerator minor.

SCHOLION I. Quælibet unitas numerus fractus eſt, ſi cum majori quantitate comparetur. Sic unus Florenus fractus eſt, ſi comparetur cum Ducato aut Carolino, quorum vel pars quarta vel decima ſit. Viciſſim Fractus, v.g. unus crucifer, poteſt & ipſe, tanquam Totum, comparari cum denariis ceu partibus. Denique (quod annotaſſe non pigeat) omnis omnino numerus integer inſtar fractionis exhiberi poteſt, ſi ipſe fiat Numerator & unitas Denominator. Sic 47, 100 vel 1000 poſſunt ita notari $\frac{47}{1}$, $\frac{100}{1}$, $\frac{1000}{1}$.

SCHOLION II. Fractio *a* poteſt etiam ſcribi, $a\,\frac{20}{60}$. $A\,20^{60mae.}$ } ùt in A. Quæ ratio ſcribendi fractum præferenda merito eſſet priori communi, ſi ubique æque commoda foret. *Secundo*, ſi unitas intelligatur diviſa in certas partes, atque una harum partium vocetur *p*; oſtendet Numerator, quot *p* ipſe contineat. Unde fluit modus notandi valorem fractionis, omiſſo Denominatore: quæ res ſubinde laboranti calculo uſui eſſe poterit. Sit v.g. $A\,\frac{20}{60}$. $B\,20\,p$ } Florenus diviſus in 60 partes ſeu cruciferos, & ex his accipiantur 20 (quæ quantitas fractione A exprimitur;) quodſi nunc unum *p* ſupponas pro uno crucifero, patet, Numeratoris valorem poſſe exhiberi Schemate B. Hæc tamen Fractio non erit proprie talis, cùm in hac Numerator neceſſario dicat reſpectum ad unitatem in certas partes diviſam, ipſeque deſignet determinatum harum partium numerum.

Explicatâ nunc Fractorum naturâ, intelligentur ea, quæ habentur §§ 29. 30. & Cap. II. Def. 5. Schol.

AXIOMA.

§ 53. Fractiones A & B ſunt æquales & ejuſdem valoris, ſi utrinque accipiantur ejuſ-

dem unitatis æque multæ partes ſimiles ali- § 53.
quotæ aut aliquantæ; ùt ſi tam in A quam B accipias unitatis vel dimidium, vel utrinque duas tertias, vel tres octavas &c.

COROLLARIUM. Æquales proinde erunt Fracti O, P, Q &c. cùm eorum Numeratores dicent eandem Rationem ad ſuos Denominatores*, aut contra. Tunc enim, terminis Rationis 6 : 9 licebit ſubſtituere primos in O, 2 : 3. * § 42. Def. 5.

$\left\{ O\,\frac{2}{3}.\ P\,\frac{6}{9}\ Q\,\frac{8}{12} \right.$

SCHOLION. Uti in hoc §, ita in ſeqq. 54. 55. 56. 58. 59. 60, Denominatores Fractorum inter ſe comparandorum ſupponentur referre eandem unitatem vel idem Totum.

PROPOSITIO XII. *Theorema.*

§ 54. *Si Fractio aliqua A B tota multiplicetur per numerum quemcunque C; nova Fractio D E eſt ejusdem cum priore valoris.* § 54.

DEMONSTRAT. Multiplicetur Numerator A per C, ùt fiat D; item Denominator A per C, ut fiat E. Jam vero producta D, E ſe habent ut A, B*. Ergo Fractiones A B, D E ſunt æquales*. *Q. e. d.* * § 43. Ax. 6. cor. *Ax. cor.

$\left\{ \frac{A\,2}{B\,4} \cdot C\,3 \quad \frac{D\,6}{E\,12} \right.$

PROPOSITIO XIII. *Problema.*

§ 55. *Fractiones* a f, b g *reducere ad eandem Denominationem*, i. e. efficere, ut Fractationes diverſorum Denominatorum acquirant eundem, ſic tamen, ut valor quem antè habebant, non immutetur.

$\left\{ \begin{array}{ccc} \frac{a\,3}{f\,4} & \times & \frac{b\,4}{g\,5} \\ \frac{C\,15}{E\,20} & & \frac{D\,16}{E\,20} \end{array} \right.$

D 5

§ 55. I^{mus} CASUS, *quando duæ Fractiones ſunt reducendæ.* Duc in ſe Denominatores *f* & *g*, ut habeatur communis Denominator E. Deinde decuſſatim multiplicabis utriusque fractionis Numeratorem per alterius Denominatorem, ut fiant Producta C & D: dico factum.

DEMONSTR. *Primo*, facta eſt reductio ad eundem Denominatorem; nam $f \times g$ generat utrinque æqualem numerum E*. *Secundo*, Fractio C E eſt ejusdem valoris cum fractione *a f*, *per Propos. præced.* cùm *a* & *f* fuerint multiplicata per idem *g*. Ex eadem ratione fractio *b g* æquivalet fractioni D E. *Q. e. d.*

* § 22. Ax. 4.

II^{dus} CASUS, *quando plures quam duæ fractiones ſunt ad idem nomen reducendæ*, v.g. *a b*, *c d*, *e f*. Revocentur *primùm*, *a b*, *c d*

$\frac{a\,3}{b\,4}$	$\frac{c\,4}{d\,5}$	$\frac{e\,2}{f\,3}$
$\frac{b\,15}{k\,20}$	$\frac{l\,16}{m\,20}$	
$\frac{n\,45}{p\,60}$	$\frac{r\,48}{p\,60}$	$\frac{s\,40}{p\,60}$

ad eundem Denominatorem, fiantque *b k*, *l m*. *Secundo*, Hos ipſos multiplica per fractionis tertiæ Denominatorem *f*, ut exurgant novi *n p*, *r p*, etiam ipſi æquales fractis *a b*, *c d*. *Tertio*, Duc Denominatorem *k* in fractionem tertiam *e f*, ut fiat nova æquipollens *s p*; habebuntque nunc novæ fractiones *n p*, *r p*, *s p*, æquipollentes primis *a b*, *c d*, *e f*, eundem Denominatorem *p*, genitum ex $k \times f$

Eodem modo reduces fractionem quartam, quintam, & ſi quæ aliæ ſint, ad idem nomen cum præcedentibus. Aliam methodum vide in P. Taquet Arithm. L. 2. c. 3. Uberrimus uſus

hujusce Problematis eſt ad inveſtigandam diverſarum fractionum Summam, Differentiam, valorem. § 56.

COROLLARIUM Practicum. *Invenire, quænam fractio ſit major, ſeu plus valeat alterâ.* Reducito fractiones ad eundem Denominatorem: Fractio majorem habens Numeratorem eſt major*. *§ 52.

SCHOLION. Datur hujus Problematis aliquando compendium, cùm nempe fractionis unius, v.g. A, Denominator aliquoties exacte continetur in Denominatore fractionis B; tunc enim ſufficiet totum fractum A multiplicare per (6) numerum indicantem, quoties 7 contineatur in 42, ut proveniat novus fractus C. $\left[A\frac{4}{7} \cdot B\frac{34}{42} \cdot C\frac{24}{42} \right.$

PROPOSITIO XIV. *Problema.*

§ 56. *Fractionem* a b *reducere ad aliam æquipollentem, quæ habeat Denominatorem* d, *ex arbitrio deſignatum.* $\left[\frac{a\ 2}{b\ 3} \quad \frac{c\ 6}{d\ 9} \right.$

Quære quartum proportionalem *c**, qui ita ſit ad *d*, uti *a* ad *b* (quod fit Productum mediorum $a \times d$ dividendo per primum *b*;) hic aſſumatur pro novo Numeratore; & fractio *c d* æquipollebit alteri *a b*, ùt manifeſtum eſt ex § 53. *Pr. 7. Cor.

SCHOLION. Servit hæc reductio ad cognoſcendum fractionis valorem in partibus notioribus. Quanquam autem ſæpiſſime quarto proportionali adhæreat nova fractio, nunc tamen longe facilius fracti ſic reducti valorem cognoſcimus, quam ante. E.G. Si foret unius Floreni fractus A; reduc fractum ad cruciferos, tribuendo illi Denominatorem 60, fiet B; ex quo cognoſco, priorem fractum valere 18 xros & 48 quinquageſimas quartas unius cruciferi, i.e. unum propemodum cruciferum. $\left[A\frac{17}{54} \cdot B\frac{18 \dagger \frac{48}{54}}{60} \right.$

§ 57. PROPOSITIO XV. *Problema.*

§ 57. *Integrum* (v.g. 6 florenos) *reſolvere in Fractum nominis dati* (v.g. 30). II. *Viciſſim Numerum Fractum* (v.g. $\frac{120}{30}$) *unitate integra majorem reducere ad integra.*

I*ma* *Pars.* Quia numeri 6 quævis unitas intelligitur dividi in 30 partes; patet, propoſitum obtineri, ſi 6 multiplicetur per Denominatorem datum 30, fiatque $\frac{120}{30}$. Hunc in modum Milliaria ad paſſus, Horæ & Gradus ad minuta prima, 2da &c. revocantur. Si numero Integro adhæreſcat fractio E.G. A $6\frac{2}{4}$; ducatur Denominator 4 in Integrum 6; & reſolvetur unaquæque Integri unitas in 4 quartas, ſeu totus 6 in $\frac{24}{4}$, quibus adhuc addendæ aliæ 2*tæ*, ut fiant $\frac{26}{4}$, quo habeatur valor totius A.

II*da* *Pars.* Divide Numeratorem 120 per Denominatorem 30; Quotus 6 oſtendet, quot integræ unitates contineantur in illo improprie fracto. *Demonſtrat.* Nam cùm 30 partes efficiant unitatem, patet in 120 tot contineri unitates, quoties 30.

COROLLARIUM. Quoties Dominator metitur & adæquate exhaurit Numeratorem, Fractio æqualis eſt Numero Integro. Si non metitur, æqualis eſt Integro cum fracto. Sic hujus $\frac{121}{30}$ quotus & ſimul valor eſt $4\frac{1}{30}$.

PROPOSITIO XVI. *Problema.*

§ 58. *Fractionem reducere ad minores terminos, qui tamen ejusdem ſint valoris, cujus minores.*

Sæpe Fractio ſcribitur magnis numeris, § 58.
ut difficulter intelligatur ejus valor, facile intelligendus, ſi terminis minoribus exprimeretur. Eam in rem reducturus fractum A ad minores terminos, divide tam Numeratorem quam Denominatorem per aliquem Numerum arbitrarie aſſumptum, v.g. per 2, 3, 5 &c. quoti d, e conſtituent Fractionem minorum terminorum, ejusdem tamen cum priore valoris; quam nonnunquam licebit denuo reducere ad minorem. *Demonſtratur* ex Propoſ. 11; nam numeri b, c diviſi per tertium retinent eandem Rationem. Ergo $bc = de$*.

$$A\ \frac{b\ 52}{c\ 78} \qquad \frac{d\ 26}{e\ 39}$$

Vel, Subtrahe tamdiu terminum minorem a proxime majore (ut appoſitum exemplum docet) donec tandem occurrat numerus, qui continuatâ Subtractione, foret a ſeipſo ſubtrahendus: quo facto per hunc poſteriorem divide ambos fractionis A terminos; quoti dabunt novam æquipollentem fractionem $\frac{2}{3}$, ex ratione mox indicata.

$$A\ \frac{52}{78} \qquad \frac{78}{52} \qquad \frac{26}{26}$$

*Axiom. Cor.

Hoc poſtremo modo fractio reducitur ad *minimos terminos*; cujus rei demonſtrationem videre eſt in L. 7. Euclid. Quodſi in hac mutua ſubtractione nunquam occurrant duo numeri æquales, ſed progreſſus fiat usque ad unitatem, ſignum eſt Fractionem non poſſe reduci ad minimos terminos; uti neque tunc, quando ſecundùm primam methodum nullus numerus metitur ambos Fractionis A terminos. Satis tamen propinque in minoribus terminis obtinebis fracti valorem, ſi aut Denominatorem dividas per Numeratorem, ut, quoties hic

§ 59. in illo contineatur, cognoſcas; vel fractum numeris majoribus expreſſum reducas, *per Propos.* 14, ad alium, cujus Denominator ſit v.g. 1000, vel 100, vel 10 &c.

PROPOSITIO XVII. *Problema.*

§ 59. *Numeros Fractos* (v.g. $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$,) *addere.* Collige Numeratores in unam ſummam, cui ſuppones eundem Denominatorem (4), fiet $\frac{10}{4}$. Nova hæc fractio ſi impropria fuerit, reducatur ad Integra*, fiet $2\frac{2}{4}$. Si Denominatores fuerint diverſi, reducantur ad eundem, & operatio inſtituatur ut ante. $\frac{1}{4}+\frac{4}{5}=\frac{31}{20}$ vel $1\frac{11}{20}$.

* Prop. 15.

PROPOSITIO XVIII. *Problema.*

§ 60. § 60. *Numeros Fractos ſubtrahere,* v.g. $\frac{2}{7}$ ex $\frac{5}{7}$. Numerator minor ſubducatur e majore: reſiduo 3 ſubſcribe Denominatorem communem; fiet & reſtabit $\frac{3}{7}$. Si Denominatores fuerint diverſi, reducantur ad eundem, & operare ut ante.

Ut ex Integro (v.g. 6) ſubtrahas fractum $\frac{3}{5}$, reſolve integri unitatem in $\frac{5}{5}$; reſtabunt factâ ſubtractione $5\frac{2}{5}$. Ut ex integro cum fracto (v.g. ex $4\frac{2}{5}$) ſubtrahas $2\frac{4}{5}$, reſolve in primo Numero unam adhuc unitatem in fractum Denominatoris dati; reſolutam adde fracto, fient $3\frac{7}{5}$; e quibus ſi ſubducas $2\frac{4}{5}$, reſtabit $1\frac{3}{5}$.

Quæ dicta ſunt in hac & præcedente Propoſitione, adeo manifeſta ſunt ex Fracti natura, ut demonſtratione peculiari haud egeant.

PROPOSITIO XIX. *Problema.* § 61.

§ 61. *Fractionem Multiplicare.* Duplici modo id potiſſimum præſtamus ex fine gemino.

I^mo^. Multiplicaturi Fractionem, E.G. $\frac{3}{5}$, per aliquem numerum Integrum, v.g. 8, intendimus tres quintas accipere octies. Clarum autem eſt, id obtineri, ſi ſolus Numerator multiplicetur per 8, relicto Denominatore 5. Fractio enim inde exurgens ($\frac{24}{5}$) exhibens toties tres quintas, quot ſunt unitates in multiplicatore 8, dabit quæſitum. Adde, hanc multiplicationem eſſe tacitam fracti ^{3}, octies poſiti, Additionem. *Corollarium.* Patet nunc illud, quod § 39. indicatum, nempe fractum *r* multiplicatum per diviſorem D gignere productum æquale Reſiduo R.

R 2		
26	6 r	$\frac{2}{4}$
D 4		

Nam R æquivalet fracto ^{8}, cujus Denominator ſit D, Numerator R×D*. Atqui, dum multiplicas Fractionem *r* per D, prodit idem fractus $\frac{8}{4}$ (cùm & ambæ notæ R, *r* eædem ſint*, & idem ſit utriusque fracti Denominator;) Ergo & poſterior fractus æquivalet ipſi R*. *Pr. 15. P. 1. *§ 38. n. 7. *C. 1. Ax. 5.

§ 62. II^do^. Ut cognoſcamus valorem unius Fractionis in altera contentæ, E.g. quid valeant duæ quintæ trium quartarum in Floreno, multiplicamus $\frac{3}{4}$ per $\frac{2}{5}$, ducendo in ſe *primo* Numeratores pro habendo Numeratore novo, *ſecundo* Denominatores pro Denominatore novo; Productum dabit quæſi-

§ 62. tum & novam Fractionem $\frac{6}{20}$, quæ in caſu propoſito valebit 6^20mas^ Floreni, aut 6 groſſos, ùt ajunt, Cæſareos.

DEMONSTRATIO. Si totus Fractus ab multiplicaretur per d, mutaretur in æquipollentem $x\,z$; ex quo ut obtineres valorem per $c\,d$ indicatum, accipiendæ forent ex 15^20mis^ duæ quintæ, ſeu bis una quinta. Unam autem ejusmodi quintam efficiunt tot 20^mæ^, quot ſunt unitates in a (nam cum 15 oriantur ex 5×3, ac proinde ſit 1 : 5 :: 3 : 15*; erunt 3^20mæ^ una quinta de 15^20mis^;) Ergo ſi multiplices a per c, productum r dabit petitum, dictas duas quintas. *Q. e. d.* Idem tibi declarabit *Figura* 1, in qua A B repræſentet Denominatorem 4 partium, & C B Numeratorem trium. Itaque dum fit $d \times b$, quævis dictarum quartarum ſubdividitur in 5 alias partes novas, ita ut Denominator nunc contineat 20^20mas^, & Numerator 15^20mas^, in quibus cum 3^20mæ^ ſint una quinta, linea o B dabit duas quintas. *Aliud Exemplum*; Petrus debet Paulo $\frac{2}{5}$ de 1340 florenis; ſolvit autem debiti ſui nonniſi $\frac{3}{4}$: quantum de ſumma ſolvit? ℞. $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$: diviſis ergo 1340 per 10, quotus 134 accipiendus ter = 402 flor.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x\;15}{z\;20} \cdot \dfrac{a\;3}{b\;4} \cdot \dfrac{c\;2}{d\;5} \cdot \dfrac{r\;6}{s\;20} \end{array}\right]$$

* Cap. 2. Def. 5. Cor. 1.

Quando multiplicandus eſt Integer per fractum, E.G. per $\frac{2}{3}$ (ùt dum noſſe cupis, quid ſint duæ tertiæ 8 florenorum,) ſuppone Integro unitatem, ut fiat fractio impropria, & multiplica $\frac{8}{1}$, per $\frac{2}{3}$, fieri $\frac{16}{3}$, i.e. ſi unus florenus in tres partes dividatur; accipiendæ ſunt ejusmodi partium 16, ſeu totidem

totidem Capitella. *Vel*, 8 florenos tanquam unum Totum divide in 8 partes $= \frac{8}{8}$, quam Fractionem multiplica, ùt ante, per $\frac{2}{3}$; fient $\frac{16}{24}$, i.e. ſi in aggregato octo florenorum quamvis unitatem partiaris in tres partes, adeoque Totum in partes 24, ſive totidem Capitella; horum 16 dabunt duas tertias. Quando Integro adhæret Fractio, reduc mixtum ad fractum, & operare, ùt ante. Sic $8 \times 3\frac{5}{8}$, vel $\frac{8}{1} \times \frac{23}{8} = \frac{184}{8}$; & $8\frac{1}{2} \times 3\frac{5}{8}$, vel $\frac{17}{2} \times \frac{23}{8} = \frac{391}{16}$. Atque hæ poſteriores operationes eandem ſubeunt Demonſtrationem cum prima. § 63.

PROPOSITIO XX. *Problema.*

§ 63. *Dividere Fractionem A per Fractionem minorem B*; ſeu invenire, quoties & quomodo Fractus B contineatur in Fracto A.

Reducito terminos ad eundem Denominatorem, ſi diverſum habuerint, (E.G. hos A$\frac{4}{5}$, B$\frac{2}{3}$ ad iſtos $\frac{12}{15}$, $\frac{10}{15}$;) Numeratorem majorem divide per minorem, quotus $1\frac{2}{10}$ vel $1\frac{1}{5}$ dabit quæſitum. *Demonſtratio.* Quïa ejusdem Denominationis Fracti ſunt ad ſe invicem ùt Numerator ad Numeratorem, horum autem Ratio continentiæ invenitur per diviſionis Quotum*: patet hinc propoſitum. Qualis pars unius cruciferi eſt $1\frac{1}{3}$ denarii? ℞. Pars tertia: nam ſi unusquisque denariorum, qui ſunt in crucifero, ſit $\frac{3}{3}$, erit 1. xr. $= \frac{12}{3}$, quod diviſum per $\frac{4}{3}$ præbet $\frac{3}{1}$ vel 3. Quomodo continetur dimidius florenus in floreni tribus quartis, ſive $\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{4}$? ℞. $1\frac{1}{2}$.

* Cap. 2. Def. 4.

§ 64. *Aliter:* Divide *a* per *c*, & *b* per *d*; exurgens inde nova fractio *e f* erit Quotus,

E

§ 64. *Demonſtratio*. Dum quæritur, quoties & quomodo $c\,d$ contineatur in $a\,b$, indagatur numerus, qui ita ſe habeat ad unitatem, ſicut Dividendus ad diviſorem: hoc eſt, ita ſe debet habere fractio $e\,f$ ad unitatem, ſive e ad f, ùt $a\,b$ ad $c\,d$. Jam vero fracti $g\,b$ Numerator g oriatur ex $f \times c$, & Denominator ex $f \times d$;

$$\frac{a\;6}{b\;8},\ \frac{c\;2}{d\;4}\ \Big|\ \frac{e\;3}{f\;2}.\ \frac{g\;4}{b\;8}$$

*Pr.12. erit primo $c\,d = g\,b$ *: 2do erit $b = b$ *; at-
*Pr.6. que hinc ùt $a : g :: a\,b : g\,b$ **. Atqui $a : g :: e : f$.
** Def. 2.Cor.2. (Nam cùm ſit $a = c \times e$, & $g = c \times f$ *, ſit autem
*Pr.6. præterea $c \times e : c \times f :: e : f$ *; ſubſtitutis æqua-
*§ 43. Ax.6. libus, erit etiam $a : g :: e : f$.) Ergo etiam
Cor. *Ibid. $a\,b : g\,b$ vel $c\,d :: e : f$ * *Q. e d.* Igitur Fra-
Ax.5. ctio $a\,b$ continet Fractum $c\,d$ ſemel & ejus dimidium, cùm & e contineat ſemel unitatem f & hujus ſemiſſem.

§ 65. Accidit perfrequenter, ùt prædictis dividendi modis inveniatur quotus cum adhærente nova fractione.

$$\frac{a\;3}{b\;4} : \frac{c\;2}{d\;5} = \frac{e\;15}{f\;8}$$

Id quod evitare ſi volueris, Fractum $a\,b$ divides per fractum $c\,d$ in hunc modum: multiplica decuſſatim a per d, ut fiat e; & b per c ut fiat f; erit $e\,f$ quotus. *Vel*, quod forte commodius, inverte diviſorem $d\,c$ (ùt in appoſito Schemate factum) & duc in ſe primo Numeratores, deinde Denominatores.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

Demonſtrationem breviter indico. Duæ fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$ implicite reducuntur, vel potius reductæ ſupponuntur ad has ($\frac{15}{20}$, $\frac{8}{20}$) ejusdem Denominatoris, quorum Numeratores prodeunt ſecundùm præſcripta. Jam vero ùt 8 continetur in 15, ita fractio poſterior in priore, *per* § 52. *n.* 2.

§ 66. Si dividendus ſit Integer per Fractum, vel Mixtus per fractum, vel Mixtus per mixtum; ſuppone Integro unitatem, ſi ei non adhæreat fractus; ſin adhæreat, reduc Integrum ad fractionem adjunctam, & operare ſecundùm § 65. E.G. Octo homines emunt 4 quintas unius prædii, cujus totius pretium eſt 400 flor.; quæritur pretium, quod quilibet dare debet? Dividenda nimirum eſt Fractio $\frac{4}{5}$ per $\frac{8}{1}$, quotus dabit $\frac{4}{40}$ vel $\frac{1}{10}$; quilibet ergo poſſidet prædii unam 10*mam*, & ſolvit de 400 flor. unam decimam i.e. 40 florenos. *Aliter*, idem obtinebis in hunc modum: Multiplicatis $\frac{4}{5}$ per 8, fiat æqualis Fractio $\frac{32}{40}$, adeo ut totum prædium ſit $= \frac{40}{40}$, ſeu 40*p*, & 4 quintæ prædii $=$ 32*p*. Jam ùt 40*p* : 400 flor. : : 32*p* : 320 fl. Igitur 4 quintæ prædii valent 320 fl. quos ſi dividas per 8 (numerum Poſſeſſorum,) quotus erit 40 fl. pars decima de 400 florenis. *Vel* divide 32 *p* per 8, competent cuivis poſſeſſorum 4 *p*, i.e. $\frac{4}{40}$ vel $\frac{1}{10}$ prædii. *Plura ejusmodi circa multiplicationem & diviſionem Fractorum proprio Marte inveniet ingenium paululum ſagax, præcedentium doctrina imbutum.*

QUÆRES, Quare in Multiplicatione Fractorum propriorum Productum evadat minus Multiplicando; & in Diviſione eorundem proveniat Quotus major Dividendo? *Rſ.* I. De Multiplicando M accipiendum eſt tantum, quantum indicatur a multiplicatore *m*; $\left\{ M\,\frac{3}{4} \cdot m\,\frac{5}{7} \cdot P\,\frac{15}{28} \right.$ ſed hic, ùt ſupponitur, indicat M neque ſæpius, neque ſemel, ſed ejus duntaxat fragmentum eſſe accipiendum: igitur & P tantùm erit ipſius M fragmentum, adeoque minus illo. *Vel*, ſicut unitas eſt ad *m*, ita M ad P: Sed unitas ponitur eſſe major ipſo *m* (cùm *m* ſit tantùm pars unitatis;) ergo & M majus erit ipſo P. *Rſ.* II. In Diviſione autem quo minor eſt diviſor, eo major eſt quotus (ùt patet in iſtis, 12 : 6 $=$ 2. 12 : 4 $=$ 3. 12 : 3 $=$ 4 &c;) & ſi numerus divideretur per unitatem, quotus foret ipſe Dividendus: ergo ſi dividatur per numerum unitate minorem (i.e. per fractum) quotus erit major Dividendo.

PROPOSITIO XXI. *Problema.*

§ 67. *Regulam Proportionum Fractionibus applicare.* Sit hæc Quæſtio: $\frac{1}{3}$ unius ulnæ

§ 67. valet 8 crucigeros, quod erit pretium de $\frac{3}{4}$ uln.? Reduc Fractiones ad idem nomen, nempe ad $\frac{4}{20}$, $\frac{15}{20}$. Fiat nunc Regula trium: ùt 4 (ſubintellige, 20^{mæ}) ad 8 xros, ita 15 (ſubintellige, 20^{mæ}) ad..., ſcil. ad 30 xros.

Si Integris adhæreſcat Fractio, E.G. in hac Quæſtione: certi aromatis Libræ $7\frac{2}{3}$ valent 20 florenos, 3 baceos & 2 xros; quid valent Libræ $4\frac{3}{4}$? Reduc Integros tam in
* Pr. 15. merce quam moneta ad fractionem,* aut (ſi
* § 41. neceſſe fuerit) ad terminos homogeneos*: deinde fractos reduces ad eundem Denominatorem, & operaberis ùt ante: ſtabit Proportio $\frac{92}{12} : \frac{57}{12} :: 1214$ *xr.* $: 752\frac{14}{92}$ *xr.*

ARTICULUS II.

De Fractionibus Decimalibus.

Scitu digna & jucunda ſunt dicta de Fractionibus vulgaribus, ſed & moleſtiam non modicam ſæpe faceſſunt calculatori; quam tamen abſtergit cognitio Fractionum Decimalium. Harum uſus dicitur primùm fuiſſe indicatus a Regiomontano Sæculi XV. Mathematico, paulo uberiùs expoſitus à Jo. Hartmanno Beyer, Medico Francofurtenſi, amplius excultus a Simone Stevino, Belga, qui diem obiit 1633. Illarum naturam & uſum hîc exponam in gratiam Tironum, qui animum aliquando applicaturi ſunt ad Geometriam, ubi earum uſus potiſſimus, eximius, ac plane aureus. Tractantur, velut numeri Integri forent: mira in iis aut multiplicandis aut dividendis facilitas. Nos earum proprietates maxime innectemus materiæ Geometricæ.

§ 68. DEFINITIO. Fractiones Decadicæ ſunt Totius cujuspiam partes decimæ, centeſimæ, milleſimæ &c. Exemplum, &
Fig. 20. totius rei declarationem cape in *Figura* 20, ubi A B repræſentat unam Perticam; hæc

ſit diviſa in 10 pedes (a quibus Decempedæ nomen ſortitur) nempe in *A c*, *c d*, *d e* &c. § 68.
Quivis Pes intelligatur diviſus in 10 pollices; continebit itaque tota Pertica 100 pollices, quorum unus in A *o*, & 10 in A *c*. Quivis pollex intelligitur dividi in 10 alias partes, quas lineas vocamus; erunt in A *o* lineæ 10, in A *c* 100, in A B 1000. Quævis porro linea dividatur in 10 ſcrupula prima; valebit tota A B 10000 ſcrupula prima. Horum unumquodque licebit dividere in 10 ſcrupula 2da, horum quodvis in 10 tertia &c.

Placet autem, ad facilitandam harum Fractionum lectionem, eas ſignis quibusdam afficere: & Integra quidem ſignabimus per o, partes decimas per ', centeſimas per '', milleſimas per ''', decimas milleſimas per '''' &c. Scilicet cuivis parti decimali tot apices opponendo, quot Zeri forent poſtponendi unitati, ad indicandum gradum eum decadicum, quem pars illa obtinet.

Quare ſi vides Numerum A; ſic eum pronunciabis generice: 34 Integra, 6 decimæ, 7 centeſimæ; 2 decies milleſimæ, 3 centies milleſimæ.

		●	'	''	'''	''''	V
A	3	4	6	7	0	2	3
B	3	4	(6	7	0	2	3(V
C	3	4	6	7	0	2	3(V
D	3	4,	6	7	0	2	3

In ſpecie vero, in materia v.g. Geometrica, ſic eum enunciabis: 34 Decempedæ, 6 pedes, 7 pollices, 2 ſcrupula prima, 3 ſcrupula ſecunda. Alii omittentes ſigna ſupra vel juxta notas ponenda, ſcribunt prædictum Numerum, ut eum in B

§ 69. vides, alii ùt in C, alii ſolo commate puncto ve Integra a fractis ſeparant, ùt fit in D, quo pacto haud difficulter fracti adhuc cognoſcuntur : hinc porro 0,203 deſignat duas decimas & 3 milleſimas ; 0,003 denotat tres partes milleſimas & nihil amplius.

§ 69. COROLLARIUM I. Conſtat ex dictis, quòd 10 pedes adæquent unam Perticam, 10 pollices unum pedem, 10 lineæ unum pollicem &c. Et cùm pedes ſint unius Decempedæ partes decimæ, pollices centeſimæ, lineæ milleſimæ; ſequitur, unum pedem, duos pedes, poſſe per modum fractionis vulgaris ita ſcribi, $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$; pollicem ita, $\frac{1}{100}$; erit item 1 linea $= \frac{1}{1000}$, duæ lineæ $= \frac{2}{1000}$ &c. in quibus omnibus fractionibus Denominator deſignat unam Decempedam.

COROLLARIUM II. Si numero cuicunque (A, B, C) ſive is ſit pure Integer, ſive compoſitus ex Integro & partibus decimalibus, ſive his poſtremis ſolum conſtet, adjiciantur Zeri ſignis decimalibus affecti, ita ut fiat

A $\overset{0}{1}$
B $\overset{0}{4}\,\overset{\prime}{3}$
C $\overset{\prime\prime}{4}\,\overset{\prime\prime\prime}{0}$

A $\overset{0}{1}\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}$, B $4\overset{\prime}{3}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}$, C $400\overset{\mathrm{v}}{0}$; hi ejus valorem non immutabunt. Nam dum ſcribo, $1\overset{\prime}{0}\overset{\prime\prime}{0}\overset{\prime\prime\prime}{0}$, lego unam Perticam, quæ quidem intelligitur eſſe diviſa in mille partes ſeu lineas ; aſt hæ ſimul ſumptæ ſunt ipſa una Pertica. Sic etiam $2\overset{\prime\prime}{0}0 = \overset{0}{2}$; & $2\overset{\prime\prime}{0}0 = \overset{\prime\prime}{2}$.

eri nempe tantùm oſtendunt, manentem eandem quantitatem ſubſecari in minores partes decadicas. § 70.

PROPOSITIO XXII. *Theorema.*

§ 70. *Particulæ decimales* a, b, c, d *æquivalent Fractioni vulgari* V, *cujus numerator ſint ipſæ notæ datæ* a, b, c, d, *ſignis nudatæ, Denominator autem ſit unitas cum tot Zeris, quot a ſigno maximo indicantur.*

DEMONSTRATIO. Fractiones decimales *a*, *b*, *c*, *d* ſunt æquales Fractis D, C, B, A*: & hi ipſi æquantur Fractionibus E, F, G, H; A quidem ipſi E, ùt per ſe patet; 2do B ipſi F, * cùm F nihil ſit quam B multiplicatus per 10; 3tio, ſimili ratione

$$\begin{array}{l} a\;b\;c\;d \\ \overset{\prime}{4}\;\overset{\prime\prime}{5}\;\overset{\prime\prime\prime}{6}\;\overset{\prime\prime\prime\prime}{7}. \\ A\ \frac{7}{10000} \quad E\ \frac{7}{10000} \quad V\ \frac{4567}{10000} \\ B\ \frac{6}{1000} \quad F\ \frac{60}{10000} \\ C\ \frac{5}{100} \quad G\ \frac{500}{10000} \\ D\ \frac{4}{10} \quad H\ \frac{4000}{10000} \\ \qquad\quad S\ \frac{4567}{10000} \end{array}$$

* § 69. Cor. 1.

* Prop. 12.

C = G, & D = H. Colligantur nunc Fractiones E, F, G, H in unam Summam S*, hæc erit æqualis ipſis A, B, C, D ſimul ſumptis, adeoque S ſeu V = *a*, *b*, *c*, *d*. *Q. e. d.* *Pr. 17.

II. *Quodſi autem Integro* m, n, *adhæreant decimales particulæ* a, b, c; *Integer unà cum decimalibus particulis erit æqualis Fracto vulgari, cujus Numerator ſint*

$$\begin{array}{l} 3\;2\;\overset{\prime}{5}\;\overset{\prime\prime}{4}\;\overset{\prime\prime\prime}{9} \\ m\;n,\;a\;b\;c \\ e\ \frac{32549}{1000} \end{array}$$

§ 71. *notæ* m, n, a, b, c *ſignis nudatæ & vulgariter acceptæ*, *Denominator verò ſit* e, *ſcilicet valor maximi ſigni* ('''). *Demonſtratio.* Reſolve Integrum *m n* in fractum, cujus Denominator ſit *e*, *per Propoſ.* 15, ut fiat $\frac{32000}{1000}$. Porro 549''' $= \frac{549}{1000}$. * Adde ambas haſce fractiones in unam Summam $\frac{32549}{1000}$; erit jam hæc æqualis Integris 32 unà cum decimalibus 549'''. *Q. e. d.*

* Num. præced.

PROPOSITIO XXIII. *Problema.*

§ 71. *Fractiones decimales Addere*, *Subtrahere*, *Multiplicare*, *Dividere*.

Additio.

A 24,56784(V	
B 4,32845(V	
28,89629(V	

Sint addenda A & B. Scribantur ita, ut correſpondeant columnatim decimæ decimis, centeſimæ centeſimis &c. Addantur uti numeri Integri § 11. Si quando ſeries partium decimalium fuerit interrupta, ita ut nullæ adſint vel decimæ vel milleſimæ &c, loca illa vacua Zeris vel punctis ſupplentur, ùt ſubjecta Exempla docent. Quod idem in ſequentibus operationibus, nempe ſubtractione, multiplicatione & diviſione eſt obſervandum: quanquam in praxi vix locum habeat hac admonitio.

§ 71.

0	I	II	III	IIII	V			
3	1	4	5	.	6			4, 2 6 7 8
0	I	II	III	IIII	V		Item	6, 3 4 . .
4	2	.	6	.	5			10, 6 0 7 8
0	I	II	III	IIII	V			
7	3	5	1	1	1			

Subtractio.

Similia ſcribuntur ſub ſimilibus; deinde fit ſubtractio velut § 16. circa numeros Integros. E.G.

	$34,23\overset{III}{3}$	$2,307\overset{IIII}{2}$	$43,0\overset{II}{0}$
	I. $9,84\overset{III}{3}$	II. $8\overset{II}{2}$ . .	III. $4\overset{II}{2}$
	$24,39\overset{III}{0}$	$1,487\overset{IIII}{2}$	$42,5\overset{II}{8}$

Ut ſubtrahas $4\overset{II}{2}$ a $4\overset{0}{3}$, adde majori tot Zeros, donec poſſit minor collocari ſub majore ſecundùm ſupra dicta, ùt in Exemplo tertio fit.

Multiplicatio.

Sint multiplicanda $\overset{I}{2}\,\overset{II}{4}\,\overset{III}{5}$ per $\overset{I}{2}\,\overset{II}{3}\,\overset{III}{4}$. Pone alterum numerorum ſub altero, uti in vulgari multiplicatione. 2do, Nullâ habitâ ſignorum ratione ita multiplicetur A per B, tanquam ſi numeri Integri forent; Producta partialia collige in unam Summam. 3tio, Maxima ſigna multiplicatoris & Multiplicandi ſibi addantur, eorum Summa (VI) eſt ſignum maximum, quo Producti nota ultima affici debet. Si datorum unus ſit integer, cui

§ 71. nullæ adhæreant decimales, Producti nota ultima ſignanda eſt ſigno maximo alterius dati, & reliquæ notæ ſignis ordine decreſcentibus, ut in Exemplo II.

Exempl. I.	*Exempl.* II.	*Exempl.* III.
A $2^{I}\ 4^{II}\ 5^{III}$	$4,6\ 5^{II}$	A. $2^{I}\ 4^{II}\ 5^{III}$
B $2^{I}\ 3^{II}\ 4^{III}$	$4,3^{0}$	B $0,2^{I}\ 3^{II}$
9 8 0	1 3 9 5	7 3 5
7 3 5	1 8 6 0	4 9 0
4 9 0	$1\ 9\ 9,9\ 5^{II}$	S. $5^{II}\ 6^{III}\ 3^{IV}\ 5^{V}$
$5^{II}\ 7^{III}\ 3^{IV}\ 3^{V}\ 0^{VI}$		

* § 69. Ratio Exempli III. A = $a\ \frac{245}{1000}$, & B = $b\ \frac{23}{100}$ *.
* § 62. At $a \times b$ gignit $\frac{5635}{100000}$ * æqualem fracto deci-
* Prop. 22. mali $5\ 6\ 3\ 5^{V}$ *, qui oritur ex A & B ſecundum præſcripta multiplicatis.

SCHOLION. Difficultate non caret Decimalium multiplicatio lineis & ſuperficiebus explicata: cùm enim Decempeda in Decempedam ducta generet Decempedam quadratam, & pollex ductus in pollicem generet pollicem quadratum, Decempeda autem in pedem ducta, non generet decempedam quadratam, ſed minus illa, nempe Rectangulum, quod ſit pars decima Decempedæ quadratæ; paulo difficilius determinatur, quid quavis multiplicatione Geometrica producatur. Verùm hæc difficultas diſſlabitur § 72. n. 2.

Diviſio.

Diviſor ſcribitur ſub Dividendo, & proceditur non ſecus, acſi Integri numeri forent dividendi. Hæc tamen præterea obſervanda. I^mo^, Peracta diviſione, ſignum maximum diviſoris ſubtrahitur a ſigno maximo Dividendi; & reſiduum eſt ſignum quo in-

ſigniri debet ultima quotientis nota. Si con- § 71.
tingat *, ſignum maximum diviſoris $(2^{\circ}\,3^{\prime}\,4^{\prime\prime})$ * v. Ex. I.
eſſe majus ſigno maximo Dividendi (4°;) unus vel plures Zeri adjiciantur Dividendo, donec ſubtractio fieri poſſit. II^do^, Si dividendus minor fuerit diviſore quoad numerum notarum (ut in Exemplo I, in quo dividendus eſt 4°) tunc ſimiliter aliquot Zeri Dividendo adjiciantur adſcriptis ſignis congruentibus, donec ſubductio fieri poſſit. III^tio^, Si peracta diviſione aliquid ſuperſit, notæ ſuperſtites iisdem ſignis notandæ, quibus totidem notæ dextimæ ipſius Dividendi. IV^to^, Si illud, quod ſuperfuerit, ſit alicujus momenti, adjice illi pro lubitu Zeros, ut ſubtractio continuari poſſit, ac quotientem novum adſcribes priori.

Exemplum I. *Exemplum* II.

$4,0000000^{(VI}$	$1,7094^{IV}$		A	$25,80079^{V}$	C $4,502^{\prime\prime\prime}$
$2,34$			B	$5,73$	

Ratio Exempli II. A = $a\,\frac{2580079}{100000}$, & B = $b\,\frac{573}{100}$ *. Sed fractio *a* diviſa per *b* dat * Pr. 22.
quotum $\frac{4502}{1000}$ *, æqualem ipſi C *; ergo etiam C * § 64.
eſt quotus ortus ex diviſione ipſius A per B. * Pr. 22.

U S U S.

Et ulterior explanatio partium Decimalium.

§ 72. I. Facillime convertes Decempedam, aut ejusdem quantitatem determinatam in partes minores, ſi addas numero tot Zeros, quot indicantur a ſigno illius partis decadicæ, in quam fit diviſio. Sic

§ 72. converſurus 23 Decempedas in pedes, adde unum Zerum, ut fiant $230'$; converſurus in pollices, adde duos, $2300''$; in lineas, adde tres, $23000'''$; quem numerum duplici modo licet enunciare, vel dicendo, 23 Decempedæ, vel viginti tria millia linearum *. Quantitates ſic ſubdiviſæ facillime item revocantur ad majorem ſpeciem: ſic 2300 pollices reduces ad pedes, dividendo dictum numerum per 10; ad decempedas, dividendo illum per 100 (nam $10'' = 1'$; & $100'' = 1^{\circ}$;) vel breviùs, abſcinde a dato numero 2300 ultimam notam, & reſtabunt 230 pedes; ſi abſcideris duas ultimas, reſtabunt Decempedæ. Sic reducturus 230000 ſcrupula ad pedes (quoniam 1000 ſcrupula efficiunt unum pedem,) divide 230000 per 1000; vel breviùs, abſcinde e Dividendo tot poſtremas notas, quot ſunt Zeri in diviſore, & habebis 230 pedes. Eam in rem proderit in promptu habere adjectam Tabellam, in qua apparet valor Decempedæ, pedis &c. in minores partes ſubdiviſorum. His obſervatis

* § 69. Cor. 2.

Scrupulum				
10	Linea			
100	10	Pollex		
1000	100	10	Pes	
10000^{IV}	$1000'''$	$100''$	$10'$	1 Decemp.

II. Dum verſaris in Geometricis, non multùm eris ſollicitus de Additione, Subtractione, Multiplicationis & Diviſionis modis §. præced. traditis: ſed poſtquam quantitates reduxiſti ad homogeneas inferioris ſpeciei, operare circa illas haud aliter, ac circa quosvis alios numeros Integros. Signa tamen conſultum eſt ſaltem in fine affigere, ut meminiſſe poſſis, ad quam ſpeciem redacta ſit ea quantitas. E.G. ſint multiplicanda $3'$ per $2'3''$; reducito *per num. I* etiam primum $3'$ ad pollices, erunt $30''$ & $23''$; duc hos in ſe invicem; Productum dabit 690 quad-

rata pollicum, repræſentata intra Rectangulum § 72. ſeu figuram quadrilateram *a b c d*. *Figura* 7.

III. Facillimum item eſt quadratòs pollices reducere ad quadratos pedes vel Decempedas. Verùm de his opportuniùs § 84.

IV. Velis fractionem vulgarem v.g. $\frac{3}{4}$ unius Perticæ convertere in partes decimales: adde numeratori aliquot Zeros, & productum divide per Denominatorem (4,) quotus *q* erit fractio decimalis notanda tot apicibus, quot zeros adjeceras Numeratori. Nam implicite

$$\left[\begin{array}{c|l} 3\;0\;0 & q\;7'\;5'' \text{ vel } \frac{75}{100} \\ 4 & \end{array}\right.$$

hanc eruis proportionem, * 4:3::100:75; nempe ùt unius Perticæ partes 4 ſe habent ad partes 3, ita 100 pollices (i.e. una Pertica in 100 pollices diviſa) ad 75 pollices. *Obſerva*: Fit nonnunquam, ùt reductio præciſa obtineri haud poſſit, ùt ſi fractio $\frac{1}{3}$ revocanda eſſet ad decadicam per adjectionem unius pluriumve zerorum; quo caſu conſultum eſt adjicere zeros non paucos, quò defectus ille fiat inſenſibilis & ſperni queat; ùt ſi dictam fractionem reducas ad decadicam hanc 33333^{v}.

*Pr. 7. Cor.

V. Perticæ non ſunt æquales apud quaſvis gentes & populos; alii enim majoribus, alii minoribus utuntur: in ipſa noſtra Germania non parum variant. Paſſim tamen Pertica civilis ſeu vulgaris dividitur in 12 pedes, pes in 12 pollices, hic in 12 lineas. Verùm quamcunque nactus fuerit Geometra, hanc dividit in 10 partes æquales ſeu pedes, pedem in 10 digitos vel pollices &c. Atque ita Pertica vulgaris commutatur in Geometricam ſeu Decempedam. Jam vero ſi Perticam E.G. Rhenanam 12 pedum Rhenolandicorum mutaſti in Decempedam, cupiasque noſſe, quas partes decimas efficiant v.g. 9 pedes Rhenani; operàre ita per Regulam auream: ùt 12 pedes Rhinland. ad 10, ita 9 ad $7\frac{6}{12}$ vel $7\frac{1}{2}$ i.e. ad 7'5''. *Secundo*, Si menſus longitudinem agri inveneris eam eſſe 2345 pedum

§ 73. Geometricorum, veliſque nunc ſcire, quid ea longitudo efficiat in pedibus Rhinland., id obtinebis per Regulam auream ſic applicatam, ut 10 : 12 :: 2345 : 2814.

CAPUT IV.

De Extractione Radicis tum Quadratæ tum Cubicæ.

DEFINITIONES.

§ 73. I. *Radix quadrata* eſt numerus, qui in ſe ipſum ductus, aptus eſt generare alium. Hic dicitur *Quadratus*.

II. Quadratus B ductus in ſuam Radicem A generat *Cubum*: reſpectu cujus A dicitur *Radix Cubica*.

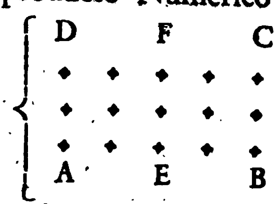
III. Numerus, qui generatur ex tribus quantitatibus in ſe ductis (ortus v.g. ex $a \times b \times c$) vocatur *Solidus*.

Præſuppoſita & prænotanda ad ſequentes Demonſtrationes.

§ 74. I. Numeri cujusvis per alium multiplicatio poteſt repræſentari lineis in ſe ductis, vel per productionem areæ, quæ ſit aut Quadratum aut Rectangulum ✻ oblongum. * Sit linea A B 5 pedum, A D 3 pe-
* Fig. 9. dum; concipiatur linea A D ſitu, quem ha-

✻ *Rectangulum A B C D in Fig. 9. vocatur ſpatium comprehenſum 4 lineis rectis perpendiculariter ſeſe tangentibus. Ut illud indicetur, non eſt neceſſe citari 4 literas A B C D, ſed ſufficit compellari duas diametraliter oppoſitas, v.g. AC, vel D B.*

bet, perpendiculari peragrare lineam A B; § 74.
tunc migrando ex A in *r* deſcribet 3 pedes quadratos *m*, *n*, *o*; migrando ex *r* in *s* deſcribet alios tres; ex *s* in E totidem; & Area A E F D, hucusque genita, erit quadratum, habens nempe ſingula latera æqualia, compoſitum ex 9 pedibus quadratis, cujus Radix eſt vel linea A E, vel E F &c. Porro prædicta linea A D poſtquam percurrerit lineam totam A B, deſcripſerit univerſim quinquies tres (i.e. 15.) pedes quadratos; quo facto quodvis quadratulorum pro unitate habebitur: eruntque in Producto Geometrico A B C D tot unitates quadratulorum, quot unitates ſunt in producto Numerico ex 5×3. Idem aſſequêris, ſi loco quadratulorum puncta aſſumpſeris, quorum quodlibet vicem unitatis obeat. Quare Numerus Quadratus merito etiam vocari poteſt is, cujus unitates per modum Quadrati Geometrici poſſunt diſponi.



Ex dictis etiam colliges, quare Euclides numerum 3 vocet latus ſui Quadrati, aut numeros 3 & 5 vocet latera Producti ex iis generandi; analogi enim ſunt lateribus Geometricis aream Geometricam generare aptis.

II. * Cubi geneſis repræſentatur, ſi concipias lineam *a b* duci geometrice in æqualem *b c*, ut inde generetur Quadratum *a b c d*: hoc porro Quadratum aſcendat rectà per li- * Fig. 19.

§ 74. neam perdicularem *a f* æqualem ipſi *a b*, ita ut retineat ſemper ſitum ad *a b c d* omnimode parallelum, ſuique veſtigium aliquod in aſcenſu continuò relinquere cogitetur; gignetur hoc pacto Cubus *a b c d e*. Si Radicalis linea *a b* * fuerit diviſa in duas partes, gignetur ex illa Cubus *abcde* complectens 8 cubulos inter ſe æquales, quorum quivis ſi pro unitate ſumatur, repræſentabit Cubus ille totalis *abcde* numerum cubicum 8, generatum ex (2×2)×2. Numerus itaque Cubicus vocari etiam poteſt is, cujus unitates diſponi poſſunt per modum Cubi. 2do*, Si Quadratum *d c g f* moveatur per perpendicularem *d a* breviorem aut longiorem uno Quadrati latere; aut ſi Rectangulum *a b c d*, *non* quadratum, moveatur ſurſum per perpendicularem *a e*, ita tamen, ut in aſcenſu ſervet continuum parallelisſmum ad primum *a b c d*; deſcribet ſolidum oblongum, quod hîc vocabimus *Parallelepipedum*.

* Fig. 11.
* Fig. 12.

III. Quoniam Productum quodvis diviſum per multiplicatorem reſtituit Multiplicandum *; patet, ſi Quadratum * A E F D ceu Productum dividatur per multiplicatorem A E, quotum fore A D, ſeu numerum partium, quæ ſunt in A D; & Rectangulo A B C D diviſo per A D, quotum fore A B, diviſo autem per A B, quotum fore A D. * Similiter ſi numerus cubulorum, qui ſunt in *a b c d e* dividatur per lineam *a f*, quotus ſiſtet Quadratum *a b c d*; ſin dividatur per dictum Quadratum, quotus dabit lineam *a f*.

* Pr. 10.
* Fig. 9.
* Fig. 11.

* Sic

* Sic etiam Numero cubulorum, qui ſunt in aliquo Parallelepipedo $abcdf$, diviſo per * Rectangulum $adfe$, quotus largietur lineam fd. § 74. * Fig. 12.

IV. Subjecta Tabella exhibet Radices ab 1 usque 9 incluſive, & earum Quadrata ac Cubos. Notabis autem, tam Quadratorum quam Cuborum notas ultimas eſſe ſignificativas.

Radix	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadratum	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Cubus	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Nota. In hoc Capite plerumque deſignabimus Quadratum per literas binas Radicales ſibi appoſitas ſine intermedio ſigno $\times$, juxta dicta § 21; ſic Quadratum e Radice a notabimus per aa; & Rectangulum ortum ex lateribus a & b notabimus per ab; Cubum ortum ex a, per $aa \times a$, vel aaa; Parallelepipedum ortum ex Quadrato aa & latere b per aab; duo ab per $2ab$; Quadratum ex Radice $a + b$, multiplicatum per c ſignabimus per $(a + b \times a + b) \times c$. E quibus nullo negotio leges & intelliges alia, quæ hoc Capite occurrunt.

Norunt equidem Algebraiſtæ brevioribus notis efferre iſthæc e verùm ab his conſulto nunc abſtinemus.

V. Si detur quodcunque Quadratum v.g. 250000, & incipiendo a dextra ſiniſtram verſus binæ quæque notæ ſeparentur h. m. 25.00.00; quemlibet notarum binarium voco hujus Quadrati *Claſſem*; ultima tamen Claſſis poterit conſtare unicâ tantùm notâ. Liquet autem ex Tabella mox data, quando

§ 75. Radix eſt unica tantùm nota, Quadratum non excedere unam Claſſem. Sed

PROPOSITIO XXIV. *Theorema.*

§ 75. *Si Radix habuerit notas duas, ejus Quadratum conſtabit ſimiliter Claſſibus duabus; ſi habuerit tres, conſtabit tribus; ſi quatuor, conſtabit Claſſibus totidem, & ſic deinceps.*

DEMONSTRATUR. Infima Radix duarum notarum, nempe 10, generat quadratum 1.00 duarum Claſſium; & infima Radix trium notarum, nempe 100, generat primum & infimum trium Claſſium quadratum, 1.00.00. Ergo omnes Radices a 10 ad 99 incluſive generant nonniſi duarum Claſſium quadrata. *Secundo*, Infima Radix trium notarum, generat (ùt modo dictum) quadratum trium Claſſium; & infima Radix 4 notarum, ſcil. 1000, generat infimum 4 Claſſium quadratum, 1.00.00.00. Omnes igitur Radices a 100 ad 999 incluſ. gignunt nonniſi trium Claſſium quadrata. Ita oſtendo, omnes Radices a 1000 ad 9999 incluſ. gignere quadrata 4 Claſſium. Et ſic porro. Ergo ſi Radix &c. *Q. e. d.* *Corollarium.* Viciſſim quot Claſſes, tot notas radicales habet Quadratum.

PROPOSITIO XXV. *Theorema.*

§ 76. *Quadratum ortum ex numero (v.g. 5) in duas partes* $a+b$ $(3+2)$ *ſecto conſtat Quadrato* aa; *& duobus Productis, quorum unumquodque oritur ex* $a \times b$, *& Quadrato partis* b. *Verbo, conſtat ex* $aa+2ab+bb$.

DEMONSTRATUR. Duc partes $a+b$ in ſe ipſas, ùt in appoſito Schemate fit,& palpabis prodire $aa+2ab+bb$. Idem ad oculum demonſtrat tum *Figura* 15, tum *Figura* 14, ſi concipias latus $a+b$ duci in ſe ipſum ſive in alterum latus $a+b$ ſimiliter ſectum. Tunc enim linea perpendicularis M N percurrens baſeos partem a generabit $aa+1ab$; percurrens inſuper alteram baſeos partem b, generabit $1ab+bb$. Idem applica Figuræ 15. *Radicem quadratam aut cubicam in duas partes ſectam ſolent vocare Radicem* Binomii; *ſectam in plures quam duas vocant* Multinomiam. § 76.

	$a+b$	$3+2$
	$a+b$	$3+2$
	$ab+bb$	$6+4$
$aa+ab$		$9+6$
$aa+2ab+bb$		

COROLLARIUM. Si detur numerus A conſtans notis tribus $a+b+c$; ejus Quadratum conſtabit ex $aa+2ab+bb+2\,(a+b)\times c+cc$. i.e. Quadratum totale conſtabit quadrato primæ partis; inſuper binis productis ex parte prima & ſecunda, inſuper quadrato partis ſecundæ, inſuper binis productis ex aggregato partis primæ & ſecundæ ducto in tertiam, ac præterea quadrato partis ultimæ. Nam concipe partes a & b per modum unius & conflatas in unam Summam $a+b$, quam vocabimus s, totumque Quadratum gigni ex duabus partibus $s+c$; erit hoc æquale τῷ $ss+2sc+cc$. Sed $ss = aa+2ab+bb$,

A	4	3	2
	a	b	c
	400	+30	+2

§ 76. & $2sc = 2(a+b)\times c$. Ergo, hæc poſteriora æquationis membra ſubſtituendo prioribus (ss & $2sc$,) erit totum Quadratum compoſitum ex $aa+2ab+bb+2(a+b)\times c+cc$. Idem declarabit *Figura* 6, ſi in ea conſideres *primo* lineam fg ceu Radicem binomiam compoſitam ex $fs+sg$, deinde modo lineam fs ſimiliter intuearis ùt Radicem binomii compoſitam ex $fu+us$.

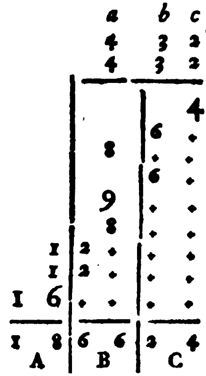
Si fuerit Radix $a+b+c+d$; ejus Quadratum, ſimili ratiocinio (habendo nempe *primùm* τὸ $(a+b+c)\times d$ pro Radice binomii) conſtabit ex $aa+2ab+bb+2(a+b)\times c+cc+2(a+b+c)\times d+dd$: & ſic de aliis. Unde, generaliter loquendo, ſi detur Radix quotcunque notarum; ejus Quadratum totale conſtabit ex quadratis cujuslibet notæ; & ex bino producto cujuslibet notæ ductæ in alias ſiniſtrorſum præcedentes.

Radix a	4 0 0	b 30	c 2
Quadratum Notæ I. a	16	· ·	· ·
$2ab$ - - - -	2	4 ·	· ·
Quadratum Notæ II. b		9	
$2(a+b)\times c$ - -		1 7	2 ·
Quadratum Notæ III. c			4
Summa totius Quadrati	1 8 A	6 6 B	2 4 C

Atque ut hæc generice dicta particulari Exemplo applicem, eſto Radix 432. Erit quadratum primæ notæ 160000. Duplum producti e prima nota in ſecundam ſeu $2ab$ eſt = 24000; & reliqua, uti in Schemate cernis.

§ 77. *SCHOLION.* Ejusdem Quadrati e Radice a, b, c, geneſin paulo diductius pono in præſente Schemate, in quo idem Quadratum apparet

in ſuas Claſſes diſtributum. Ac in prima quidem Claſſe A perſpicis latere quadratum primæ notæ radicalis *a*; quo ex prima claſſe ſubducto, remanet ex hac 20000, quæ pertinent ad bina Rectangula orta ex bis 400 × 30. 2do, ſi ex hoc reſiduo & claſſe B fiat aggregatum, in hoc latebunt $2ab$ & bb, i.e. bis 12000 & 900 &c. Advertis præterea, quòd, ſi in expanſo ponantur producta partialia Quadratum conſtituentia, quadrata incipiant ab ultima ſemper nota cujusvis Claſſis, ac ſubinde in anteriora porrigantur. Quod ipſum contemplari etiam licet in Schemate § 76, ubi (uti & hîc) notas quadraticas majuſcule expreſſimus. § 77.



Nec inutile erit conſiderare, quomodo ſynthetice conſtruatur Quadratum *f g i m* Fig. 6. Nimirum dum 432 ducis in ſeipſum, ex 2 × 2 generatur *cc*; ex 2 × 3 generatur Rectangulum minus *ux*; ex 2 × 4 Rectang. *fo*. 2do, ex 3 × 2, *xb*; ex 3 × 3, *bb*; ex 3 × 4, *re*. 3tio ex 4 × 2, *kb*; ex 4 × 3, *ke*; ex 4 × 4 *aa*. Quæ producta ſimul ſumpta conſtituunt Quadratum 186624.

PROPOSITIO XXVI. *Problema.*

§ 78. *Ex numero Quadrato* (v.g. 186624) *Radicem quadratam extrahere.*

I. Divide datum numerum in ſuas Claſſes*; ſtabit 18. 66. 24. Quære in Tabella § 74. n. 4. membrum primum 18, aut (ſi illud ibidem exacte non inveniatur,) numerum proxime minorem, ſcil. 16, cujus radicem 4, ibidem inveniendam, ſcribe poſt vir-

* § 74. n. 5.

§ 78.

		a b c
A	18.66.24	432
	16	
m	266	d 83
n	249	e 862
p	1724	
q	1724	

gulam. Radicem hanc duc in ſe ipſam, productum 16 ſubtrahe a membro 18; eſtque peracta prima operatio, quæ amplius non repetitur.

II. Reſiduo 2 adſcribe ſecundam Claſſem, fiet 266. Radicem inventam duplica, numerus 8 inde enatus erit diviſor ſcribendus infra *a*: quære quoties diviſor hic contineatur in *m* demptâ hujus notâ ultimâ (ſcil. quoties contineatur in 26;) quotum 3 ſcribe & poſt virgulam in *b* pro altera radice, & poſt diviſorem 8, ùt cernis in *d*; duc in diviſorem ita auctum (nempe in 83) radicem novam 3, productum *n* ſcribe infra totum *m*; ſubtrahe *n* ex *m*, reſiduo ſubſcripto. Eſtque peracta 2*da* operatio, cui ſimiles ſunt omnes aliæ ſequentes.

Nota. Accidit nonnunquam, ut diviſor plusquam novies contineatur in membro dividendo, ùt eveniet extracturo Radicem ex 324; nec tamen in loco quoti ſeu Radicis licet ſcribere ultra novenarium, imo & hic ſubinde adhuc juſto major eſt, ut proinde neceſſe ſit aſſumi aliam radicem proxime minorem, donec Productum *n* ſubtrahi poſſit ex membro *m*.

III. Reſiduo 17 itaque rurſus adſcribe Claſſem tertiam, ut fiat 1724. Duplica radicem hactenus inventam (43,) fiet 86; per hoc divide membrum *p* demptâ notâ ultimâ (h. e. divide 172,) quotum 2 ſcribe & in *c* & poſt diviſorem, ùt vides in *e*; totumque *e* multiplica per radicem recens inventam, productum *q* ſubtrahe ex *p*. Et ſi fuerit numerus A exacte quad-

ratus, qualis hîc ſupponitur, remanebit § 78. nihil.

Demonstratio.

I. Totus Quadratus dividitur *primùm* in membra A, B, C. Et cùm in primo membro A lateat quadratum primæ notæ radicalis*, quærenda eſt hujus quadrati nota maxima radicalis, quæ erit aliqua centenariarum; nam ob tres Quadrati Claſſes prodibunt tres notæ radicales*, quarum prima utique centenaria erit. Maxima autem nota radicalis hîc eſt 4, valens 400, nam 400×400 = 160000; ſi vero aſſumeres aliam unitate majorem, ſcil. 500, ejus quadratum foret 250000, majus membro A, adeoque radix falſa.

A	1 8. 0 0 0 0
B	6 6 0 0
C	2 4

* § 77. vel Pr. 3.

* Pr. 24. Cor.

II. Reſiduum 20000 pertinet ad bina Rectangula (2 *a b* *,) quæ deſinunt in membri *m* ſecundi notam ſecundam (6,) ita ut ad Rectangula illa plane non pertineat membri *m* nota tertia 6, prout hæc conſtant ex Propoſitione 3, quæ hîc continuo applicanda: hinc diviſuri hæc Rectangula 2 *a b* per 2 *a* (ad eruendum *b* *) reſecamus ab iis notam tertiam 6. Duplicatur itaque radix *a* *, ut habeatur latus M L Rectanguli M L K N, in quo repræſentantur duo Rectangula (2 *a b*) conjuncta. Jam vero dividendo 2 6 0.0 0 per 800, radicem duplicatam, invenitur latus L K * (= 30,) & nota radicalis altera *b*; quæ in ſeſe ducta gignit *b b*, ducta inſuper

* § 77.

* § 74. n. 3.

* Conf. Figur. 5.

* § 74. n. 3.

§ 78. in 2 *a* gignit 2 *a b*, quæ omnia latent in
* § 77. 26600*. Unde producta iſthæc (*n* 24900)
vel Pr. 3. ſubtracta ex *m* (26600) relinquunt 1700 pertinentia ad Rectangula 2 ($a+b$) × *c*. Atque in hac ipſâ ſubtractione ſeſe manifeſtat inventæ radicis veritas: quæ quidem *primo* non erit verâ minor, cùm ſupponatur maxima, quæ potuit, radix aſſumpta: 2[do], nec erit juſtâ major; aliàs Productum ex taliter falſis $2ab+bb$ evaſiſſet majus, quam ut potuiſſet ex membro *m* ſubtrahi. Unde ſi quando ſubductio iſthæc fieri nequeat, indicio eſt, fuiſſe aſſumptam radicem juſto majorem.

III. Duplicatur radix hactenus inventa, fitque 2 ($a+b$,) ut habeatur latus P Q * Rectanguli P Q R S, in quo repræſentantur Figuræ 6[tæ] duo Rectangula *f x* & *x i* conjuncta in unum: hoc latere ceu diviſore dividendum eſt P Q R S, ſive numerus 172, in cujus notam ultimam deſinunt dicta Rectangula * vel 2($a+b$;) inveniturque radix *c*; quæ ducta & in ſe, & in 2($a+b$) producit eam quantitatem, quæ neceſſario metietur reliquum 1724. Ergo per prædictas operationes fuit totum Quadratum analytice diſtributum in ſuas partes, & ex his veræ radices erutæ. *Quod erat faciendum.*

* Vide Fig. 4.

* Pr. 3.

SCHOLION I. Quando diviſor ne ſemel quidem continetur in membro dividendo, ſcribitur poſt virgulam in loco Radicis Zerus; & continuatur operatio ſecundùm præſcripta, ſcil. duplicando radicem antea inventam & dicto Zero auctam.

II. Si Quadratum pluribus conſtet Zeris; & poſt primam alteramve operationem nihil maneat reſiduum, facilis

eſt reliqua operatio; nimirum ſcribuntur pro radice deinceps tot Zeri, quot ſunt claſſes reliquæ in Quadrato. Sic Quadrati. 4.00.00.00 *Radix eſt* 2000. § 79.

De Numeris non exacte quadratis.

§ 79. Plurimi dantur numeri Integri, quorum Radix nequit eſſe numerus itidem Integer, ùt manifeſtum reddit vel ſola Tabella § 74. n. 4, in qua quidem omnes numeri Quadrati ſunt exacte quadrati, & horum Radices numerus Integer. Verùm inter iſtos, v.g. inter 9 & 16 exiſtunt hi, 10, 11, 12, 13, 14, 15, quorum certe Radix nequit eſſe Integer, & hi vocantur non exacte quadrati. Ita etiam ſi juxta ſuperiùs præcepta ex hoc numero 186977 eruas Radicem, invenies eſſe hanc 432; aſt abſolutâ operatione remanebunt 353, adeoque nec 432 erit exacta Radix de 186977, nec hic ipſe numerus exacte quadratus. An vero Radix vera non poterit eſſe numerus Integer cum fracto? R. Nec iſtud: nam de natura Radicis eſt, ut ducta in ſe ipſam exhauriat ſuum quadratum: atqui nullus integer cum fracto poteſt metiri & exhaurire Quadratum conſtans Integro. Detur enim, ſi fieri poteſt, Quadrati A Radix R, compoſita ex Integro & fracto. Reducatur Integer, qui eſt in R, ad fractum datum & conjungatur cum illo *, fiet $r\,s$, Radix ipſius A, quæ in ſe ducta generat (ùt mox dicetur § 80) Quadratum $q\,p$, æquale Integro A. At ſi $q\,p$ æquivaleat Integro, p metietur ipſum q *, i.e. quadratus quadratum; quod dum fit, etiam (*uti demonſtrat Euclides L. 8. Propoſit.* 14) radix s metitur radicem r, adeoque & fractio $r\,s$ æquivalet Integro *. Ergo R eſſet Integer, ùt modo probatum eſt; & non eſſet, cùm ſupponatur eſſe Integer cum fracto. Numeri itaque A Radix vera nequit eſſe Integer cum fracto, vocaturque talis Radix numerus *Irrationalis*, aut *Surdus*, eoquod nec ullis numeris Integris nec fractis poſſit nobis exponere ac determinare, qualis pars ſui quadrati ſit

$$R\ 3\tfrac{1}{3}\ .\ A\ 10.\qquad \frac{r\ 10}{s\ 3}\ .\ \frac{q\ 100}{p\ 9}$$

* Pr. 15.
* Pr. 15. Cor.
* Pr. 15. Cor.

§ 79. hujus Radix vera. Unde quot dantur Numeri non exacte quadrati, tot dabuntur Numeri Irrationales.

Quæres. Poteſtne interim numeri non exacte quadrati inveniri Radix veræ tam propinqua, ut defectus qui ſubeſt, merito ſperni poſſit? ℞. *Affirmative*, idque hunc in modum. Dato numero non exacte quadrato adjice plures Zerorum binarios, atque ex ita aucto extrahe Radicem. Tunc illæ Radicis notæ, quæ ex adjectis Zerorum binariis prodibunt, denotabunt partes decimales, illa quidem primi binarii partes decimas, illa ſecundi binarii partes centeſimas, tertii partes milleſimas; atque ita porro. Unde quo plures Zerorum binarios adjeceris numero dato, eo exactiorem nanciſcêris Radicem. Sic ſi numero cuipiam dato, v.g. 12, adjicias duos binarios, ut fiat 12. 00. 00, prodibit Radix $3^{\circ}\,4^{\prime}\,6^{\prime\prime}$, ita ut defectus minor ſit una parte centeſima. Si extracturus Radicem ex 5, facias 5. 00. 00. 00; prodibit Radix $2^{\circ}\,2^{\prime}\,3^{\prime\prime}\,6^{\prime\prime\prime}$, quæ quamvis a vera adhuc deficiat, error tamen minor erit una parte milleſima.

Si extiterit Integer, cum fractis decimalibus numero notarum impari, v.g. 2, 462; *adjice imparem Zerorum numerum, e.g.* 2, 4620000, *quò fracti omnes in Claſſes includantur.*

Ut autem intelligas, poſſe per methodum §phi 78. etiam ex numero dato non exacte quadrato v.g. B 187488 Radicem in Integris extrahi, conſidera Quadratum exactum, dato proxime minus A 186624, & aliud exactum proxime majus C 187489, cujus Radix eſt 433. Jam vero ſi extrahas ſecundum præcepta Radicem ex B, ultima
* Reſume Exempl. § 78. nota radicalis c * ne quidem unitate peccare poteſt ſupra juſtam; alioqui hæc ducta & in ſe & in $2(a+b)$ generaſſet productum q majus, quam ut potuiſſet ſubtrahi ex membro ultimo p; prodiiſſent namque $2(a+b) \times c + cc$ Quadrati majoris C.

EXAMEN extractæ rite Radicis fit, ſi Radix ducatur in ſe ipſam. Tunc enim Productum erit æquale numero Quadrato, ſi is

fuerit exacte quadratus *. Sin poſt extra- § 80.
ctionem reſiduum aliquid extiterit, iſtud ad- * 73.
ditum Producto ex Radice in ſe ducta reſtituet eum numerum, e quo eruenda Radix fuerit.

Nota. *Hoc poſterius verùm tantùm eſt, dum aſſumpſiſti notam radicalem, quæ aſſumi poterat, maximam: Secùs ipſum te Examen fallet. Ut ſi extrahas ex* 8765 *Radicem* 89, *remanebunt* 844, *quæ addita quadrato Radicis reſtituunt numerum* 8765; *& tamen falſa eſt Radix* 89, *vera hæc*, 93.

§ 80. QUÆRES: Quomodo quadranda Fractio, v.g. A? R. Quadrandus eſt tam Numerator quam Denominator, ut fiat B: cujus rei rationem explicabit *Figura* 13. Ex qua etiam diſcis, quadratum fractionis nunquam pertingere ad unitatem quadratam. Diſcis ſimul, ad eruendam Fractionis Radicem quadratam, hanc eſſe tam e Denominatore quam Numeratore extrahendam. Si Fractionis termini non fuerint exacte quadrati, licebit totam Fractionem convertere in æquipollentem, multiplicando illos per 100, vel 10000, vel 1000000 &c. atque inde extrahere Radicem veræ propinquiorem.

A $\frac{2}{3}$. B $\frac{4}{9}$

Extractioni Radicis quadraticæ prorſus analoga eſt illa Cubi: idcirco ante, quam ad hanc tranſeas, fac doctrinam de quadratis probe perſpectam habeas.

PROPOSITIO XXVII. *Theorema.*

§ 81. *Quot notis conſtat Radix Cubica plurium notarum, in tot Claſſes trium notarum dividi poteſt numerus Cubicus, exceptâ Claſſe ultimâ ſiniſtimâ, quæ conſtare etiam poteſt notâ unicâ aut duabus.* Hinc ſequens Cubus 1.023.400.630, conſtabit Radice notarum quatuor.

§ 81. DEMONSTRATIO. Infima Radix duarum notarum, nempe 10, producit Cubum 1.000 duarum Claſſium; & infima Radix trium notarum, nempe 100, producit primum & infimum Cubum trium Claſſium, ſcil. 1.000.000. Ergo omnes Radices a 10 ad 99 incluſive generant Cubos conſtantes duabus tantum Claſſibus. Eodem modo oſtendo, quod & Cubus Radicis 100, & omnes alii habentes radicem trium notarum conſtent totidem Claſſibus; cùm infima Radix 4 notarum, nempe 1000, generet primum & infimum 4 Claſſium Cubum 1.000.000.000. Et ſic deinceps. Ergo quot notis &c. *Q. e. d.* *Corollarium.* Viciſſim quot Claſſes, tot notæ radicales.

PROPOSITIO XXVIII. *Theorema.*

§ 82. *Si numerus qualiscunque* (v.g. 3) *ſecetur in duas partes* a+b (2+1,) *ejus Cubus conſtabit cubo ex* a, *præterea tribus ſolidis, quorum quodvis oritur ex quadrato partis primæ ducto in partem* 2dam, *præterea tribus ſolidis ortis ex parte prima ducta in quadratum partis* 2dæ, *demum & Cubo ex* b. *Verbo: Cubus totalis ex* a+b *conſtat* aaa+3aab+3abb+bbb.

DEMONSTRATIO. Ut oriatur Cubus ex $a+b$, ducenda eſt hæc Radix in ſe ipſam, ad
* Pr.25. habendum Quadratum $aa+2ab+bb$ *; deinde eadem Radix $a+b$ ducenda in hoc Quadratum. Atqui ſi *primo* ducatur a in dictum Quadratum, oritur $aaa+2aab+abb$: 2do, ſi b in idem ducatur, oritur $aab+2abb+bbb$.

Ergo Cubus ortus e dicta Radice binomia § 82.
univerſim continet $aaa + 3aab + 3abb + bbb$. *Q. e. d.* Si horum veritatem volueris manibus contrectare, fac tibi e materia facile ſectili Cubum, ejusque duas ſuperficies quadratas contiguas diſtribue in $aa + 2ab + bb$; & Cubum ſeca juxta *Figuræ* 16. manuductionem: invenies hac analyſi partes A; B, B, B; C, C, C; D. i.e. $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.

COROLLARIUM. Si Radix fuerit ſecta in partes tres, $a + b + c$; ejus Cubus totalis conſtabit. I^mo^ ex $aaa + 3aab + 3abb + bbb$, II^do^ ex $3(a+b \times a+b) \times c + 3(a+b) \times cc + ccc$. Nam ſi conſideres $(a+b)c$ tanquam Radicem binomiam, dabit hæc cubum ex parte prima $a+b$, & quantitates *ſecundo* recenſitas.* Atqui Cubus ex parte prima æquatur quantitatibus *primo* recenſitis. Ergo totus Cubus ex $a+b+c$. æqualis eſt quantitatibus *primo* & *ſecundo* recenſitis. * Pr.28.

Si Radix fuerit $a+b+c+d$, habe $(a+b+c)+d$ pro Radice binomia; cujus Cubus totalis conſtabit ex cubo primæ partis $(a+b+c,)$ mox deſcripto, inſuper $3(a+b+c \times a+b+c) \times d + 3(a+b+c) \times dd + ddd$. Id eſt, Cubus ex $a+b+c+d$ continet $aaa + 3aab + 3abb + bbb + 3(a+b \times a+b) \times c + 3(a+b) \times cc + ccc + 3(a+b+c \times a+b+c) \times d + 3(a+b+c) \times dd + ddd$. Et generaliter loquendo Cubus e Radice quotcunque notarum conſtat cubis ſingularum notarum radicalium, item tribus Productis ortis ex quavis nota dexteriore ducta in quadra-

§ 82. tum omnium ſe ſiniſteriorum, item tribus Productis ortis ex quadrato cujusvis notæ dexterioris, ducto in omnes ſiniſteriores anteriores.

SCHOLION. En, juxta hactenus dicta, partes omnes. Ex quo colligis *primo*, quòd, Cubo *aaa* e Claſſe A ſubtracto, in reſiduo unà cùm Claſſis B nota prima lateant 3 *aab*; & in eodem reſiduo Claſſis A unà cum Claſſe B lateant 3 *aab* † 3 *abb* † *bbb*. *Secundo*, quòd in Claſſium A, B, C notis ultimis incipiant Cubi *aaa*, *bbb*, *ccc*, & in anteriora ſubinde porrigantur; quòd in Claſſis B nota prima incipiant, contineri 3 *a a b* atque in anteriora extendantur &c. Calamum ipſe applica, &, datâ Radice, Cubi totalis geneſin per partes ſingulas condere ne pigeat.

	a 4	*b* 3	*c* 2
Cubus a a a	64	. . .	. . .
3 a a b - - - - - -	1 4	4 . .	. . .
3 a b b - - - - - -	1	0 8 .	. . .
Cubus b b b - - - - -		27	. . .
3 Solida e (quadr. ex a † b) × c	1	1 0 9	4 . .
3 Solida ex (a † b) × c c		5	1 6 .
Cubus c c c			8
	8 0	6 2 1	5 6 8
	A	B	C

PROPOSITIO XXIX. *Problema.*

§ 83. *Radicem Cubicam extrahere ex Numero Cubico qualicunque*, *v.g* 80621568. Reſolutionem Problematis & Demonſtrationem dabimus ſimul, hanc tamen minore charactere expreſſam.

I. Si numerus non excedat notarum ternarium, ejus Radix reperietur in Tabella § 74. n. 4. Si ſit major, velut mox datus, incipiendo a dextris, numerum in plures trium notarum Claſſes ſecato, excepto membro ul-

timo ſiniſtimo; quod conſtare etiam poteſt notâ unicâ aut duabus. *Secundo*, Quære in Tabula Cuborum § 74. n. 4. inter Cubos ſiniſtimum membrum, aut, ſi hoc ibidem exacte non inveniatur, Cubum dato membro proxime minorem; ejusque Radicem Cubicam (quæ hîc erit 4) poſt virgulam ſcribe. Cubicetur radix 4, fiet 64, quod ſubtrahe a membro primo; reſiduum 16 ſcribe in *m*. Hæc prima operatio deinceps non repetitur. § 83.

In prima Claſſe A latet primus Cubus: nam quia quot membra, tot notæ radicales eruendæ, hinc prima nota radicalis hîc inveſtiganda erit Centenaria; quæ ſi quadretur, producti nota (quæ erit ſignificativa *) ultima occupabit locum quintum *: hæc ipſa ſi itidem multiplicetur per aliquam centenariam, producti hujus nota ultima * promovetur ad locum ſeptimum ✻: adeoque in Claſſe A latet primæ notæ radicalis Cubus. Et quoniam aſſumpſimus maximam, quam potuimus, Radicem 4, hæc erit vera radix, valens hic 400.

	A	B	C	
				a † *b* † *c*
				4 3 2
	80	6 2 1	5 6 8	
	64			diviſores
m	1 6	6.2 1		48. Triplum quadrati ex *a*
n	1 4	4		
o	1	0 8		
p		2 7		5547 Triplum quadrati ex (a † b)
q	1 5	5 0 7		
r	1	1 1 4	5.6 8	
s	1	1 0 9	4	
t		5	1 6	
u			8	
x	1	1 1 4	5 6 8	
z	1 0	0 0 0	0 0 0	

* § 74. n. 4.

* Pr. 3.

* Quæ etiam eſt ſignificativa, ùt facile deduces è § 74. n. 4.

✻ *Si Productum conſtet notâ ſignificativâ unicâ, hæc itidem multiplicatione primâ promovetur ex loco tertio ad quintum, ex hoc ad ſeptimum, ùt conſtat ex Propoſ. 3.*

§ 83. II. Reſiduo 16 adſcribe Claſſis B notam primam, fiet 166 novum diviſionis membrum, quod dividatur per triplum Quadrati radicis hucusque inventæ (4) i.e. per 48, quotus 3 erit ſecunda nota radicalis ſcribenda poſt virgulam.

Nam in reſiduo Claſſis primæ juncto Claſſi B latet cubus ſecundus: is etenim oritur ex b notâ Decadicâ, quæ ſi quadretur quadrati hujus nota ultima ſignificativa promovetur ad locum tertium, quæ ſi itidem multiplicatur per eandem decadicam, producti nota ultima promovetur ad locum quartum, adeoque ad Claſſem 2dam. Porro in Claſſis B prima nota 6 incipiunt $3aab$ *; Unde ſi membrum 166 dividatur per $3aa$, prodit deſideratus quotus b, utpote ex cujus multiplicatione orta fuerant $3aab$ *.

* Pr. 28. Schol. vel Pr. 3.

* § 74. n. 3.

Secundo, Per radicem modo inventam 3, tres inſtitue multiplicationes; ac *primo* quidem duc eam in diviſorem 48, productum ſcribe in n, videlicet ultimam producti notam ponendo ſub prima nota (6) Claſſis B. 2do, duc quadratum radicis recens inventæ in triplum radicis antea inventæ (4,) ſcil. in 12, fiet 108 ſcribendum in o, producti notam ultimam ponendo ſub nota ſecunda Claſſis B. 3tio, cubica radicem recens inventam, fiet 27, quod ſcribes in p, uno rurſum gradu ad dextram removendum. Hæc tria producta collige in unam Summam q, quam ſubtrahe ex toto m (annumerando nunc etiam Claſſis B duas notas ultimas 21,) reſiduum 1114 nota in r. Eſtque peracta ſecunda operatio, cui ſimiles ſunt omnes aliæ ſequentes.

Finis

Finis hujuſce operationis eſt, inventâ radice b, ex numero noſtro Cubico ſubtrahere $3aab \dagger 3abb \dagger bbb$, quæ omnia latent in reſiduo membri A & Claſſe B, in cujus poſterioris Claſſis notam primam 6 deſinunt $3aab$, in ſecundam $3abb$, in tertiam Cubus bbb*. Atqui hoc obtinetur ſecundùm præſcripta; nam ducendo radicem in diviſorem ($3aa$) naſcuntur $3aab$ poſita in n, & repræſentata in *Figura* 17; ducendo quadratum radicis in $3a$ naſcuntur $3abb$, poſita in o, & repræſentata in *Figura* 18; demum cubicando radicem naſcitur bbb, poſitum in p, & repræſentatum in *Fig.* 19: unde etiam liquet, quare productum o ſcribatur uno gradu remotius verſus dextram quàm n, & p quàm o, uti perſpicuum denuo fit ex Propoſitione 3, quæ præſenti materiæ omnem pene lucem affundit. Demum in hac ipſa ſubtractione Summæ q ex m deprehenditur veritas radicis b, quæ quidem *primo* nequit eſſe juſto minor, tum quia, ùt ſupponimus, dividendo $3aab$ per $3aa$ fuit pro quoto aſſumpta maxima, quæ potuit, nota radicalis; tum quia ad membrum diviſionis 166 pertingit potiſſima etiam pars de $3abb$ & aliquid de 3 quadratis ex $(a \dagger b) \times c$, adeoque timendum potius eſſet, ne (ſi fieri poſſet) erueretur radix juſto major quam minor: 2do, inventa radix nequit eſſe juſto major, aliàs ſumma ex taliter falſis $3aab \dagger 3abb \dagger bbb$ evaſiſſet major, quam ut potuiſſet ſubtrahi ex toto m. Quare ſi fors acciderit, ut dicta Summa q nequeat ſubduci ex membro m, ſignum eſt, te erraſſe, atque ad errorem corrigendum aſſumendam eſſe notam radicalem unitate minorem. § 83.

* Pr. 3.

III. Reſiduo 1114 adde Claſſis C notam 5, ut fiat 11145 novum diviſionis membrum, pro quo ut habeatur diviſor, accipe triplum quadrati radicum hactenus inventarum, fiet 5547: fiat diviſio; quotus 2 ſcribatur in loco c; hunc duc 1mo in diviſorem, fiet s; 2do, quadratum radicis 2 duc in triplum radi-

§ 83. cum 43; antè inventarum, fiet *t*; 3^{tio}, cubicatam radicem ſcribe in *u*, & memento producta collocare, ùt in *Num.* II. fuit imperatum. Collige tria hæc producta in Summam *x*, quam ſubtrahes ex membro *r* nunc aucto Claſſis C duabus notis ultimis 68, & remanebit in *z* nihil.

Demonſtratio eadem eſt quæ *Numeri* præcedentis; atque hanc operationem oculis rurſus objicies in *Figuris* 17. 18. 19, niſi quod loco 3 *aab* imaginari jam debeas 3 *ddc* (ſubſtituendo literam *d* pro (*a* † *b*) & pro 3 *abb*, 3 *dcc*; & pro *bbb* cubum *ccc*.

Itaque operatio tota bene peracta fuit, eo quod auferendo omnes partes Cubi totalis debet remanere nihil; has autem auferendo inventæ ſunt veræ notæ radicales. *Q. e. f.*

COROLLARIA ET OBSERVATIONES.

I. Si in Claſſis alicujus membro Dividendo diviſor ne ſemel contineatur, ſcribitur Zerus pro nota radicali. Si daretur hic numerus 8.000.000.000, ſcriptâ Claſſis primæ radice 2, quæ primum membrum exhauriat, adjiciantur tot Zeri, quot ſequuntur Claſſes; eritque Radix 2000.

II. EXAMEN fit cubicando Radicem totam inventam; tunc enim Productum adæquabit numerum Cubicum, ex quo fuit eruta, quando ſub finem operationis nihil remanſerit: ſin aliquid remanſit, Radix cubicata unà cum hoc reſiduo adæquabit numerum, ex quo fuit extracta. Sin aliter, erratum fuit.

III. Sicut in quadratis, ita & numeris non exacte cubicis nequit haberi Radix vera. In-

venietur tamen veræ propinquior, ſi nume- § 84.
rum Cubicum (v.g. 23 Decempedarum Cubicarum) ſubſeces in cubulos multo minores, quod fit, ſi dato numero adjicias plures Zerorum terniones, h.m. 23.000.000.000, quo caſu habebis 23 millia Millionum Cubulorum linearium, ùt mox declarabitur, e quibus extrahetur Radix 2843 linearum; ac defectus minor erit unâ lineâ ſeu una parte milleſima.

IV. Fractionis A radicem cubicam habebis, ſi tam e Numeratore quam Denominatore extrahas Radicem, quæ erit B: nec enim aliud eſt Fractionem B cubicare, quam ejus & Numeratorem & Denominatorem multiplicare cubice.

$$\left[\begin{array}{l} A\ \frac{27}{343} \\ B\ \frac{3}{7} \end{array}\right.$$

OBSERVATIO

Pro Quadratis et Cubis Geometricis.

84. Quadratum Decempedæ continet 100 pedes quadratos; nam 1 Decempeda = 10 ped. ſed 10×10 = 100 ped. quadrat., prout idem etiam demonſtrat *Figura* 8, in qua linea *ab* repræſentet Decempedam. Similiter unus Pes quadratus continet 100 pollices quadratos, & ſic deinceps. Unde ſi dentur 4326780 lineæ quadratæ, velisque ſcire, quot pollices vel pedes quadrati contineantur in dato numero, divide illum per 100, quotus 43267 dabit pollices quadratos; hunc ipſum ſi denuo dividas per 100, quotus 432 dabit pedes quadratos: eodem modo erues adhuc 4 Decempedas quadratas. Vel breviùs, loco diviſionis, abſcinde duas ultimas

§ 84. notas. Vel numerum datum diſpeſce in claſſes binariorum h.m. $4^{\circ}, 32', 67'', 80'''q$, & poteris enunciare: 4 Decempedæ quadratæ, 32 pedes quadr., 67 poll.qu., 80 lin.qu. Eâdem facilitate invenies valorem Cubi: continet autem Decempeda Cubica 1000 pedes cubicos; nam 10 ped. × 10 ped. = 100 ped. quadr. & 100 ped. qu. × 10 ped. = 1000 ped. cub. Similiter pes cubicus comprehendit 1000 cubos digitales &c. Unde ſi dentur 24800325607 lineæ cubicæ; hunc numerum divide per 1000 (vel abſcinde tres ultimas notas,) & quotus aut reſiduum dabit 24800325 pollices cubicos. Vel totum numerum diſpeſce in Claſſes ternariorum h.m. $24^{\circ}, 800', 325'', 607'''c$, & valebit 24 Decempedas cubic., 800 ped. cub., 325 poll. cub., 607 lin. cub. Colligitur etiam ex dictis, facillime converti Quadratum aliquod aut Cubum in quadratula aut cubulos minoris ſpeciei, adjungendo nempe pro quadratulis Zerorum binarios, & horum ternarios pro cubulis: ſic 2 Decempedas quadratas convertes in pollices quadratos, ſi fiat 20000; 2 Decempedas cubicas convertes in pollices cubicos, ſi fiat 2000000. Serviet hæc converſio in quadratula & cubulos minoris ſpeciei, ut Radix veræ propinquior poſſit ex iis extrahi: ſic ex datis 2 Decempedis quadratis extrahes ſecundùm præſcripta Radicem exactiorem $1^{\circ}4'1''$, cujus defectus minor erit uno pollice. Si plures adjeceris Zerorum binarios, Radicem attinges datâ accuratiorem.

CAPUT V. § 85.

De Progreſſionibus & Logarithmis.

ARTICULUS I.

De Progreſſionibus.

§ 85. DEFINITIO I. *Progreſſio* eſt ſeries plurium Rationum ſimilium & Proportionem continuam conſtituentium. Alia Geometrica, ùt 3, 9, 27, 81. vel 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. Alia Arithmetica; de qua paulo poſt.

§ 86. DEFINITIO II. Ratio ipſius A ad C dicitur *componi* ex Rationibus deſignatis A:B, B:C, quando Rationis A:C Exponens oritur ex Rationum deſignatarum Exponentibus inter ſe multiplicatis. Sic ſi Exponentes Rationum A:B, B:C ſint 2 & 3, quæ in ſe ducta generant 6, fueritque 6 Exponens Rationis A:C, dicetur hæc Ratio componi ex deſignatis Rationibus; eritque tunc A bis triplum ſeu ſextuplum de C.

A.		B.		C
12	:	6	:	2
	2		3	

2do. Si Ratio A:C componatur ex duabus Rationibus intermediis æqualibus, dicetur eſſe A ad C in *Duplicata* Ratione primæ quantitatis A ad ſecundam B, i.e. A erit ter triplum ſeu noncuplum de C. Si Ratio A:D componatur ex tribus Rationibus intermediis æqualibus, dicetur eſſe A ad D in *Triplicata* Ratione primæ ad ſecundam; ſi ex

A		B		C		D
54	:	18	:	6	:	2
	3		3		3	

§ 86. quatuor, *Quadruplicata*, & ſic deinceps de aliis Rationibus Multiplicatis. Itaque in præſente Exemplo erit A de D triplo-triplo-triplum, vel noncuplo (*denominationem primò ſumendo a Ratione duplicata*) triplum, verbo 27^{plum}.

SCHOLIA. I^mum.^ *Cave ne confundas Rationem Simpli, Dupli, Tripli &c. cum Ratione Simplici, Duplicata, Triplicata &c. diverſiſſima enim hæc ſunt. Sic Ratio* 2 : 2 *eſt Ratio ſimpli ; Ratio* 4 : 2 *Simplex, & ſimul Dupli, eoquod primus terminus ſit duplus ſecundi.*

II^dum.^ *Aliis Ratio ex duabus vel pluribus aliis compoſita definitur ea, quam habet Productum ex duarum vel plurium Rationum Antecedentibus ad Productum ex earundem Conſequentibus. Nobis contra placuit tueri, quod & Etymologiæ & Antiquorum diuturnæ authoritati conſonabat* *. *Demonſtrabimus tamen* § 109, *datis pluribus Rationibus, Productum ex Antecedentibus eſſe ad Productum è Conſequentibus in Ratione compoſita datarum Rationum.*

* Vide Euclid. L. 6. Def. 5.

§ 87. NOTA. In Cap. II. § 42. Def. 4. Exponentem Rationis vocavimus eam quantitatem, quæ indicat, quoties major terminus contineat minorem. Sunt etiam, qui Exponentem vocant quantitatem illam, quæ docet, quomodo Rationis alicujus Antecedens ſe habeat ad ſuum Conſequens. Nos utrâque Notione utemur: ad confuſionem tamen evitandam, Exponentem primo modo acceptum dicemus *Exponentem Rationis* ; ſecundo modo acceptum dicemus *Exponentem Antecedentis* (nempe ad ſuum Conſequens.) Ubi præterea notandum, quòd in Ratione minoris inæqualitatis, e.g. 3 : 6, Exponens Antecedentis ſcribatur per modum Fractionis h.m. $\frac{3}{6}$, vel $\frac{1}{2}$, nam, quando poſſunt, reducendi ſunt

Fractionis termini ad minimos. Velim etiam § 87.
obſerves, poſſe cujusvis Rationis Exponentem exprimi per Fractum, v.g. hujus 2:4 ita $\frac{2}{4}$; 24:13 per $\frac{24}{13}$; quæ res intellectâ Fractorum naturâ per ſe ſe manifeſta eſt.

PROPOSITIO XXX. *Theorema.*

§ 88. *In quavis Ratione Geometrica ſi minor terminus multiplicetur per Exponentem Rationis, Productum eſt æquale termino majori.*

II. *Si Conſequens multiplicetur per Exponentem Antecedentis, erit ſemper Productum æquale Antecedenti.*

DEMONSTRATUR I. *Pars.* Exponens Rationis eſt quotus reſultans ex diviſione termini majoris per minorem; ſed quotus ductus in diviſorem reſtituit Dividendum, i.e. hîc terminum majorem, Ergo.

DEMONSTRATUR II *Pars.* In Ratione majoris inæqualitatis res patet ex Parte I. In Ratione minoris inæqualitatis ſe habebit A ad B, ut in fractione *a b* Numerator ad Denominatorem (i.e. ſi terminus B aſſumatur pro uno Toto 5 partium, A habebit hujusmodi partium tres.) Sed ſi multiplicetur B (5) per *a b* ($\frac{3}{5}$), accipiendæ ſunt de B $\frac{3}{5}$tæ * i.e. ipſe A. Ergo. ✱

A	:	B
3	:	5
$\frac{a}{b}$		$\frac{3}{5}$

* § 19.

COROLLARIUM I. Hinc loco hujus Rationis A6:B2, ſcribi poteſt hæc æquipollens B×*e*:B, intelligendo per *e* Exponentem Rationis; qui etiam crebro amat exprimi lit-

✱ *Confer. Append. Additam. V.*

§ 88. terâ *e* Algebraice multiplicatâ cum aliquo Rationis termino, hoc modo, B*e* : B. Unde hæc Proportio *a* 3 : *b* 6 : : *c* 2 : *d* 4, aliter ſic ſcribetur, *a* : *ae* : : *c* : *ce*.

COROLLARIUM II. Poſitâ Ratione 2 : 4 (vel quavis alia) continuatur Progreſſio aſcendendo, ſi Exponentem datæ Rationis ducas in terminum conſequentem, quotus dabit terminum immediate majorem : quo pacto exurget hæc Progreſſio 2 : 4 : 8 : 16 &c. Continuatur deſcendendo, ſi datorum terminus ultimus minor dividatur per Exponentem Rationis ; quotus dabit immediate minorem. Deſcendendo tamen devenietur tandem infra unitatem. Neque Proportio, quæ multiplex non eſt, continuari poteſt per numeros Integros.

COROLLARIUM III. Radix, Quadratum, Cubus ſunt tres termini continue proportionales. Nam cùm hîc Radix ſit ipſe Rationum Exponens, erit 3 : 9 : : 9 : 27*.

R.	Q.	C.
3.	9.	27
3	3	

* Cap. 2. Def 5. & 6.

Secundo, Quia eſt ùt 1 : R : : R : Q, erunt Unitas, Radix, Quadratum, Cubus quatuor continue proportionales.

PROPOSITIO XXXI. *Theorema.*

§ 89. *Si fuerint tres quantitates ordine poſitæ A, B, C; Ratio primæ ad tertiam eſt Compoſita ex Rationibus intermediis A : B, B : C.*

DEMONSTRATUR. Exponens Rationis A : C eſt Productum, ortum ex multiplica-

tione Exponentium (*e*, *d*) Rationum inter- § 89.
mediarum: Ergo A eſt ad C in Ratione compoſita ex Rationibus intermediis. *Probo Antecedens.*

A	B	C
12	6	2
e 2	d 3	f

Si Exponens Rationis A : C dicatur *f*, erit C*f*× = A, item *e*× B = A *. *Pr. 30. p. 2.
Unde ob æqualia Producta * C× *f*, *e*× B * § 8. Ax. 5.
conſtituetur hæc Proportio B : C : : *f* : *e* **; **Pr. 7. p. 2.
proinde *d* Exponens Rationis B : C erit etiam Exponens Rationis *f* : *e*; & ſicut C× *d* eſt ipſum B*, *Pr. 30.

B : C	: :	f : e
d		d

ita *e*× *d* eſt ipſum *f*. *Q. e. d.* Hæc Demonſtratio eſt univerſalis, ac vera etiam tunc, cùm Exponentes, vel A, B, C, fuerint Fracti, quos in Proportione B : C : : *f* : *e*, vel C : B : : *e* : *f* tractabis inſtar numerorum Integrorum *. *Pr. 21.
Vera item, cùm Rationes intermediæ variant per majorem & minorem inæqualitatem, ùt 24 : 6 : 18, ubi prima continet tertiam ſemel & illius $\frac{1}{3}$; harum enim Ratio conſurgit ex $\frac{4}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$. Ejusdem Demonſtrationis univerſalitatem ampliùs declarabit Append. Additam. V.

COROLLARIUM I. Si fuerint plures quantitates quæcunque, v.g. A, B, C, D, E; Ratio primæ ad ultimam componetur ex omnibus Rationibus intermediis A : B, B : C, C : D, D : E. Nam ùt oſtenſum eſt, Ratio A : E componitur ex Rationibus A : B, B : E; hæc autem B : E componitur ex B : C, C : E; & hæc C : E ex C : D, D : E. Ergo. Et vero

A	B	C	D	E
12.	6.	3.	2.	1

G 5

§ 89. ſi Exponentes Rationum intermediarum ita
* § 87. diſponas $\frac{12}{6}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$ *, & tam Numeratores quam Denominatores in ſe ducas, habebis $\frac{432}{36}$, in quo Numerator ſe habet ad Denominatorem ùt 12 ad 1. Eadem Ratio $\frac{12}{1}$ eruetur, omiſſis quibusdam intermediis & poſitis duntaxat his duabus A:B:E, ſeu 12:6:1.

COROLLARIUM. II. Si fuerint tres numeri continue proportionales A, B, C; Ratio primi ad tertium eſt Compoſita ex duabus Rationibus æqualibus adeoque *Duplicata*, h.e. Exponens Rationis A:B (2) per ſe ſe multiplicatus gignit Exponentem Rationis A:C. Si fuerint quatuor continue proportionales; Ratio primi ad quartum eſt in Triplicata Ratione primi ad ſecundum. Et ſic deinceps. Adeoque Exponens Rationis Compoſitæ ex duabus æqualibus eſt Quadratum ex Exponente Rationis unius ſimplicis. E tribus æqualibus eſt Cubus &c. Quare porro,

A B C
2 : 4 : 8

COROLLARIUM III. Si detur hæc Progreſſio, 2, 4, 8, 16, 32; eadem aliter exprimetur, ſi Exponens *e* ducatur *primo* ſimpliciter in primum terminum *a*, pro habendo ſecundo *. Si 2do bis in ſe ductus ducatur in *a*, pro habendo termino tertio, & ſic porro juxta Schema præſens.

a. ae. aee. aeee. aeeee
2. 4. 8. 16. 32
e e e e

*Pr. 30.

COROLLARIUM IV. Si fuerint hæ Proportiones
X : R : : *a* : *b*, &
R : Z : : *c* : *d*, ita ut R in prioribus Rationi-

bus ſemel ſit Conſequens, deinde Antecedens; erit X ad Z in Ratione Compoſita Rationum X:R, R:Z; vel Rationum $a:b, c:d$. § 90.

PROPOSITIO XXXII. *Theorema.*

§ 90. I. *In omni Progreſſione Geometrica tam* a×f *Productum extremorum, quam Producta* (b×e, c×d) *terminorum æqualiter ab extremis diſtantium ſunt inter ſe æqualia.*

a	b	c	d	e	f
3.	6.	12.	24.	48.	96.

DEMONSTRATUR. Ob ſervatam Proportionem continuam eſt $a:b::e:f$; atque hinc $a \times f = b \times e$ *. Similiter quia eſt $b:c::d:e$, $b \times e = c \times d$. *Q. e. d.* * Pr. 7.

II^do^. *Quivis terminus Progreſſionis Geometricæ* (e.g. x) *ſive is medius ſit, ſive non, in ſe ductus, eſt æqualis Producto quorumlibet æqualiter ab ipſo diſtantium. Sic E.G.* x×x = b×e.

a	b	c	x	d	e	f
3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.

DEMONSTRATUR. Ob continue proportionales c, x, d, erit $x \times x = c \times d$ *. Sed, *ex Parte I*, $b \times e = c \times d$: ergo etiam $b \times e = x \times x$. *Q. e. d.* * Pr. 8.

COROLLARIUM *Practicum.* Progreſſionis Geometricæ terminum quemcunque, licet non ſint cogniti omnes intermedii, exhibere. Scribe primos aliquot Progreſſionis terminos, ut hîc factum. Jam ſi velis invenire Progreſſionis hujuſce terminum 26^tum^; duc

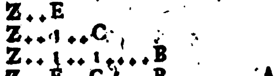
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 &c.
a	b	c	d	e	f	g	h	i	k
1.	2.	4.	8.	16.	32.				

§ 90. E.G. ſextum f in ſe ipſum, fiet Productum 1024 æquale Producto ex termino ſecundo b & decimo k, unde ſi illud dividas per ſecundum, quotus dabit terminum Decimum 512, qui ductus in Exponentem dat terminum 11^{mum}, qui tractatus ùt prior f largitur 20^{mum} 524288, hic ductus in Exponentem dabit 21^{mum}, & hic ſimiliter 22^{dum}, & ſic porro. Vel, quod minùs operoſum, quia 20^{mus} eſt ad 26^{tum} in Ratione ſextuplicata, duc in ſe ſex Exponentes ordine poſitos, & horum Productum 64 duc in terminum vigeſimum, novum enim Productum 33554432 dabit terminum 26^{tum}. Idem obtinebis ducendo e in f, & productum dividendo per a, quotus dabit k decimum, &c. Alios modos ipſe excogitabis ex hactenus poſitis.

Admirandum eſt Progreſſionis Geometricæ incrementum. Unum granum ſeminis producat ſingulis annis 10 *grana; producentur anno quadrageſimo grana* 10000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000, *quorum acervus mole longe ſuperat Globum noſtrum Terraqueum. Rex, ne gravet nimium ſubditos, exigat ab omnibus ſimul pro tributo primâ hebdomade unam aciculam, ſecundâ duas, tertiâ quatuor, & ita porro; proveniet poſt hebdomadas* 52 *ſeu Annum unum tanta acicularum Summa, ut licet harum centuria crucigero veneat, omnia tamen Europæ Regna non ſint ſolvendo.*

PROPOSITIO XXXIII. *Theorema.*

§ 91. *Si fuerint quantitates quotcunque continue proportionales* (EZ, CZ, BZ, AZ); *erit ùt* CE, *exceſſus ſecundæ ſupra primam minimam ad ipſam minimam* EZ, *ita* AE, *exceſſus maximæ* AZ *ſupra minimam ad omnes ſimul reliquas* BZ, CZ, EZ.



DEMONSTRATUR. Transferantur quantitates proportionales, hîc expreſſæ punctis EZ, CZ, BZ, in maximam AZ. Quoniam itaque eſt AZ:BZ::BZ:CZ::CZ:EZ; erit etiam *dividendo* * AZ − BZ : BZ : : BZ − CZ:CZ::CZ − EZ:EZ, i.e. ùt AB:BZ ::BC:CZ::CE:EZ. Ergo * ùt CE ad EZ ita AB + BC + CE hoc eſt AE, ad BZ + CZ + EZ. *Q. e. d.* Et in Exemplo hîc appoſito erit ùt 6 − 2 : 2 : : 54 − 2 : : 18 + 6 + 2.

§ 91.

* Pr. 9. n. 5.

* Pr. 9. n. 6.

EZ	CZ	BZ	AZ
2	6	18	54

COROLLARIUM *Practicum*. Datâ Progreſſione E.G. *a* 2. *b* 6. *c* 18. *d* 54. *e* 162, invenire Summam omnium terminorum. Dic, ùt 6 − 2 ad 2, ita 162 − 2 ad *d*, *c*, *b*, *a* ſimul, i.e. ùt 4:2::160:80; huic poſtremo adde terminum maximum *e*, & habebis quæſitam Summam, 242. Cupiens ſcire Summam omnium granorum, de quibus paulo ante, dic ùt 100 − 10 ad 10, ita numerus 1 cum 40 adjectis Zeris − 10 ad Summam omnium terminorum, qui maximum antecedunt, quibus ſi accenſeas & ipſum maximum, habebis Summam totius Progreſſionis.

De Progreſſione Arithmetica.

§ 92. DEFINITIO. *Progreſſio Arithmetica* eſt ſeries numerorum æquali exceſſu ſeſe ſuperantium, ùt 1. 2. 3. 4. 5 &c. vel 4. 6. 8. 10 &c. Exceſſum, quo una quantitas aliam ſuperat, vocabimus *e*.

§ 92. COROLLARIUM I. Quilibet terminus,

a	*b*	*c*	*d*	*f*
2.	4.	6.	8.	10

v.g. *d*, Progreſſionis Arithmeticæ aſcendentis continet minimum terminum *a* & toties communem exceſſum *e*, quot poſt primum usque ad ipſum incluſive ſunt termini. Unde pro *a*, *b*, *c*, *d* ſcribi poteſt (a), $(a+e)$, $(a+e+e)$, $(a+e+e+e)$,

COROLLARIUM II. Si ſint quotcunque

	A	2. *vel*	1.
I	B	4.	2.
II	C	6.	3.
III	D	8.	4.
IV	E	10.	5.
V	F	12.	6.

quantitates A, B, C, D, E, F arithmetice continue proportionales; exceſſus ultimæ F ſupra primam A diviſus per numerum intervallorum dat Differentiam, qua ſe invicem excedunt. Nam terminus ultimus F nihil eſt niſi A cum tot differentiis, quot ab A intervallis diſtat: proinde $F - A$ continet toties differentiam *e*, quot intervallis F diſtat ab A; unde ſi $F - A$ dividatur per numerum intervallorum, quotus indicabit Differentiam.

Facillimum eſt, dato exceſſu vel differentia *e*; continuare Progreſſionem Arithmeticam, ſcil. ſi aſcendendo *e* addatur termino priori, ut fiat novus; deſcendendo autem ſubtrahatur.

PROPOSITIO XXXIV. *Theorema.*

§ 93. *Si dentur 4 quantitates Arithmetice, ſive continue ſive diſcretim,*

	a	*b*	*c*	*d*
	2.	4.	6.	8
vel	2.	4.	8.	10

proportionales; Summa extremorum a d *eſt æqualis Summæ mediorum* b, c; hoc eſt, $a+d = b+c$.

DEMONSTRATUR. Quia *b* excedit ipſum § 93.
a, & *d* ipſum *c* eodem exceſſu *e*; hinc $b = a + e$, & $d = c + e$. Subſtitutis itaque pro *a*, *b*, *c*, *d*, iſtis, *a*, $a + e$, *c*, $c + e$, manifeſtum eſt Summam extremorum $a + c + e$ æquari Summæ mediorum $a + e + c$ vel $a + c + e$. *Q. e. d.*

II^do^. *Si fuerint* a 2. b 4. c 6. *arithmetice continue proportionales; erit Summa extremorum dupla Medii, æqualis autem termino Medio bis ſumpto.* DEMONSTR. Nam pro *a*, *b*, *c*, pone *a*, $a + e$, $a + 2e$: ubi vides Summam extremorum ($2a + 2e$) eſſe duplam Medii $a + e$, æqualem autem Medio bis ſumpto. Hinc

COROLLARIUM I. Mediam proportionalem inter quantitates datas (v.g. 2, 6) invenies, ſi eas in unam Summam colligas, & hujus capias dimidium, quod dabit mediam.

COROLLARIUM II. Datis duabus quantitatibus (v.g. 2, 4) invenire tertiam arithmetice proportionalem. A duplo ſecundæ ſubtrahe primam, reſiduum dabit tertiam 6.

COROLLARIUM III. Datis tribus numeris Arithmetice proportionalibus invenire quartum proportionalem. Terminum ſecundum & tertium collige in unam Summam, a qua ſubtrahe primum; reſiduum dabit quartum, *per Partem I.*

COROLLARIUM IV. In quavis Progreſſione Arithmetica Summa duorum quorumlibet terminorum (e.g. *c*, *f*) eſt æqualis Summæ duorum (*a*, *b*) æqualiter ab ipſis diſtantium.

a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.

Nam quia *b* toties continet ex-

§ 93. ceſſum ſupra *f*, quoties eundem continet *c* ſupra *a*, proportionem Arithmeticam conſtituent hi termini *a*, *c* ; *f*, *b*. Ergo, per Partem I, *c*†*f* = *a*†*b*. Item in quavis Progreſione Arithmetica terminus quicunque, v.g. *d*, eſt dimidium Summæ duorum (*b*, *g*) æqualiter ab ipſo diſtantium: nam quia *g* continet toties exceſſum *e* ſupra *d*, quoties *d* ſupra *b*, hinc *b*, *d*, *g*, ſunt in Proportione continua, adeoque, *per Part. II.*, *b* † g = *d* † *d*. Ergo.

PROPOSITIO XXXV. *Theorema.*

§ 94. *In omni Progreſſione Arithmetica habebitur Summa omnium terminorum, ſi Summa termini minimi & maximi ducatur in numerum terminorum, & Productum dividatur per 2.*

DEMONSTRATUR. Si *primo* numerus terminorum fuerit par; æquales inter ſe erunt Summæ binorum *a*†*i*, *b*†*h*, *c*†*g*, *d*†*f* *. Ergo una harum Summarum v.g. *a*†*i*, ducta in totum numerum terminorum (8) producet duplum omnium Summarum ſive omnium terminorum. Unde hoc diviſum per 2 dabit veram omnium terminorum Summam.

a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*	*i*
1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.

* Prop. 34. Cor. 4.

Secundo, Si numerus terminorum fuerit impar; æquales inter ſe ſunt Summæ binorum *a*†*h*, *b*†*g*, *c*†*f*, *d*†*d*; Unde una harum Summarum, v.g. *a*†*h*, ducta in totum numerum terminorum (qui hic eſt 7,) pro-

a	*b*	*c*	*d*	*f*	*g*	*h*
2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.

producit duplum omnium terminorum, atque hoc diviſum per 2 reddit veram omnium terminorum Summam. *Q. e. d.* § 95.

Sic ſi voluerit ſcire Summam omnium pulſuum horariorum ab hora prima ad 12mam incluſive, proveniet ſecundùm hanc Propoſitionem Summa pulſuum 78.

Quæ fuerunt in hac & ſuperiore Propoſitione explicata circa terminos aſcendentes, nullo negotio transferuntur ad deſcendentes.

ARTICULUS II.
De Logarithmis.

§ 95. DEFINITIO. Logarithmi ſunt ſeries numerorum conſtitutorum in Progreſſione Arithmetica, correſpondentium totidem numeris in Progreſſione Geometrica conſtitutis. Sit in Schematis I. Columna G ſeries Geometricè proportionalium, quibus in columna A reſpondeant totidem termini Arithmeticè proportionales: hi vocantur priorum Logarithmi,

Schema I.				Schema II.			
	A		G		A		G
m	1.	*a*	2	m	0.	*a*	1
n	2.	*b*	4	n	1.	*b*	2
p	3.	*c*	8	p	2.	*c*	4
q	4.	*d*	16	q	3.	*d*	8
r	5.	*e*	32	r	4.	*e*	16
s	6.	*f*	64	s	5.	*f*	32
t	7.	*g*	128	t	6.	*g*	64
u	8.	*h*	256	u	7.	*h*	128

atque in calculando quaſi vicem Geometricè proportionalium obeunt. Eſt autem, ſi ſeries G conferatur cum ſerie A, hæc illarùm proprietas & utilitas, quòd per Logarithmos longe facilius inveniatur terminus quispiam geometricè proportionalis, quam per communem methodum, *Prop. 7. & 8. Coroll.* præ-

§ 95. ſcriptam. Nam ſi (ut in Tabula Schematis I) exiſtant plures termini continue Geometrice proportionales, quibus ſui e regione reſpondeant vicarii Logarithmi, datisque in columna G duobus terminis *a*, *c*, velles invenire tertium Geometrice proportionalem, deberes *c* multiplicare per ſe ipſum, & productum dividere per *a*, quotus daret quæſitum *e*, 32. At quia Logarithmi dictorum terminorum ſunt continue Arithmetice proportionales, ſubtrahe a duplo ſecundi primum *m*, invenietur tertius *r*, & per hunc reſpondens e regione Geometrice proportionalis *e* 32. Similiter datis tribus geometrice proportionalibus *b* 4 : *d* 16 : : *e* 32, quorum Logarithmi ſunt *n*, *q*, *r*, invenietur quartus proportionalis ope Logarithmorum; si *q*, *r* Logarithmi mediorum in unam Summam colligantur, & ab hac ſubtrahatur *n* Logarithmus primi, reſiduum dabit *t* ſeu quartum Arithmetice proportionalem; hic autem velut digito prodit & manifeſtat affixum ſibi Geometrice proportionalem *q* 128, qui quærebatur. Itaque inventio termini Geometrice proportionalis tanto facilius perficitur per Logarithmos, quanto facilius eſt operari per ſolam Additionem & Subtractionem, quam per Multiplicationem & Diviſionem.

Hæc termini Geometrice proportionalis inventio obtineri poteſt per Schematis tum I^{mi} tum II^{di} Logarithmos, imo & per quoscunque alios, E.G. 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20 &c. aut per hos 100, 200, 300, 400, 500, 600 &c.

Liberum itaque & arbitrarium eſt, datis Geometrice proportionalibus aſſignare qualeſcunque Arithmetice proportionales. Verùm determinatis ſemel duorum numerorum Logarithmis, liberum amplius non erit quoſcunque apponere Logarithmos; nam turbaretur alias & interrumperetur Progreſſio Arithmetica. Placuerat olim Nepero, Logarithmicæ Arithmeticæ inventori, atque idcirco de Matheſi præclare merito, aſſumere Logarithmos incipientes ab unitate & ordine naturali progredientes, ùt 1. 2. 3. 4. 5. &c. prout eosdem ſupra exhibet Schema I. Aliis tamen (adſtipulante majore Mathematicorum parte) ſatius longeque commodius fore viſum eſt, ſi numerorum Geometrice proportionalium atque ab 1 incipientium Logarithmi ducerent initium a Zero, hoc modo, 0. 1. 2. 3. 4 &c. ùt oſtendit Schema II; cujus inſtituti commoda mox percipies in ſequentibus, in quibus nonniſi de Progreſſione Logarithmica Schematis II. nobis ſermo erit. § 95.

§ 96. Secunda Logarithmorum Proprietas & utilitas eſt: Si ſeriei G numerus, v.g. 4, multiplicet alium numerum 16, erunt multiplicatorum Logarithmi *p* & *r* æquales Logarithmo Producti. *Demonſtr.* Cùm enim tunc ſit ùt 1:4::16:64, iſtisque reſpondeant hi Arithmetice proportionales *m* 0, *p* 2, *r* 4, *t* 6; erunt Logarithmi medio-

	A		G
m	0	*a*	1
n	1	*b*	2
p	2	*c*	4
q	3	*d*	8
r	4	*e*	16
s	5	*f*	32
t	6	*g*	64
u	7	*h*	128

§ 97. rum æquales Logarithmis extremorum: & quia extremorum unus o nihil addit alteri extremo *t*, erunt Logarithmi *p* † *r* = *t*.

§ 97. COROLLARIUM I. Quia Radix (v.g. *d*) per ſemet multiplicata producit Quadratum (*g*); Logarithmus Radicis duplicatus (nempe *q* † *q*) eſt æqualis Logarithmo Quadrati, τῷ *t*. *Secundo*, Logarithmus *t* Quadrati *g* diviſus per 2 dat *q* Logarithmum Radicis.

§ 98. COROLLARIUM II. Logarithmus Radicis *b* (4) triplicatus, eſt æqualis Logarithmo Cubi *d*. Nam Radix & Quadratum per ſe invicem multiplicata producunt Cubum; igitur amborum Logarithmi adæquant Logarithmum Cubi. Sed Logarithmus Quadrati eſt duplus Logarithmi Radicis, atque adeo in his duobus ſimul ſumptis ter continetur Logarithmus Radicis. Ergo. *Secundo*, Si accipias Logarithmi Cubi partem tertiam, quod fit eum dividendo per 3; hæc dabit Logarithmum Radicis Cubicæ.

§ 99. COROLLARIUM III. Quia in omni Diviſione quotus *q* ductus in diviſorem *d* producit Dividendum D;

D 32 | *q* 4]
d 8 |]

hinc Logarithmi numerorum *q* & *d* ſimul ſumpti adæquant Logarithmum Dividendi D. Quare ſi a Logarithmo Dividendi ſubtrahas Logarithmum diviſoris, reſiduum præbet Logarithmum quoti.

§ 100. Facillimum quidem eſt invenire Logarithmos numerorum in determinata

proportione continua Geometrica creſcentium, §100.
v.g. hac, 1. 2. 4. 8. 16 &c. vel 3. 9. 27 &c. aut creſcentium proportione decupla 1. 10. 100. 1000 &c. horum enim Logarithmi haud dubie erunt 0. 1. 2. 3. 4. &c. Atenim ejuſmodi artificium modicam admodum utilitatem præſtaret Mathematico, propterea quòd inter datos numeros Geometricos plurimi ſint intermedii, quibus & quorum Logarithmis caremus: ſic datis 4: 6: : 32: nihil me juvabit Schema II ad inveniendum quartum proportionalem. Tunc autem ingens fieret calculi compendium, ſi daretur Tabula aliqua Logarithmica univerſalis, in qua queiscunque datis terminis poſſet ſubſidio Logarithmorum inveniri terminus Geometrice proportionalis aut medius, aut tertius, aut quartus. Atqui inventum hoc fuit Sæculo ſuperiore à perſpicaciſſimo Nepero, Nobili Scoto, circa A. 1614, & ab aliis perfectum, inventis eam in rem duabus columnis, in qua ordine naturali progrediuntur numeri 1. 2. 3. 4. 5 &c. usque ad 1000 aut ultra, ſi libuerit, nullo intermiſſo; qui quidem numeri licet ſpeciem Progreſſionis Arithmeticæ præ ſe ferant, certâ tamen ratione inter ſeſe collati apti ſunt, Logarithmorum ſuorum in altera columna adſcriptorum beneficio, omnes Proportionis Geometricæ proprietates ſubire. Antè vero, quàm ad conſtructionem hujusce Tabulæ accedamus, probe ſciendum & fundamenti inſtar tenendum, *primò*, quòd datis duobus termi-

§101. a 2. b 4. c 8. / m 0. n 1. p 2.] nis *a*, *c*, inveniatur medius Geometrice proportionalis, ſi ex $a \times c$ extrahatur Radix, quæ erit ipſe medius proportionalis *b* *. *Secundò*, ut vero datis duorum 2 & 8 Logarithmis *m*, *p*, invenias etiam *n* Logarithmum medii, colligendi ſunt in unam Summam extremi *m*, *p*; hujus Summæ dimidium dabit quæſitum *n* *. Nunc ad rem.

* Pr. 8. Cor. 3.

* Pr. 34. Cor. 1.

Quomodo Canon Logarithmorum conſtruendus.

§ 101. Eligitur, majoris facilitatis causâ, Progreſſio Geometrica terminorum ab 1 creſcentium in proportione decupla, ſcil. 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 &c. His e regione attribuantur Logarithmi, prout Schema III. docet. Sit jam propoſitum invenire Logarithmum Numeri 9, comprehenſi inter 1 & 10, quorum jam exiſtunt Logarithmi 0.0000000 & 1.0000000. Augeantur numeri Geometrici A & B, item 9, Zerorum ſeptenario, quò in Fractionem Decimalem reſolvantur, ita ut ſit A (1) = 1,0000000, & B (10) = 10,0000000, & 9 = 9,0000000; idque ideo fit, ut, cùm inter datos numeros 1 & 10, aliosque plures mox recenſendos inveniendi ſint per extractionem Radicis quadratæ non pauci medii proportionales, hæ vero Radices plerumque nonniſi per appro-

Schema III.

Progreſſio Geometrica.	Progreſſio Arithmetica.
A 1	0.0000000
B 1 0	1.0000000
1 0 0	2.0000000
1 0 0 0	3.0000000
1 0 0 0 0	4.0000000
1 0 0 0 0 0	5.0000000
&c.	&c.

ximationem ad veram haberi poſſint, error § 101.
& defectus ſubrepens non excedat unam partem millioneſimam: ob ſimilem cauſam Logarithmis 0, 1, 2, 3, 4 &c. plures adjiciuntur Zeri. His ſuppoſitis, ad inveniendum numeri 9 Logarithmum, quærito *primò* inter A & B medium Geometrice proportionalem C, quod fit, ſi ex 1,0000000 × 10,0000000 = 1000000000000000 extrahas Radicem quadratam C 3,6122777 $= 3\frac{6122777}{10000000}$. Huic Numero C ſtatim e regione ſuum appone Logarithmum 0,5000000, quem invenies, ſi Summam extremorum, i.e. hic ſolum Logarithmum 1,00000000 dividas per 2. At quia inventus C nondum accedit ad inveniendum 9 vel 9,0000000, quærendus eſt inter C & B alius Geometrice proportionalis D, unà cum correſpon-

	Medii Geometrice Proportionales.	Logarithmi.
A	1.0000000	0.00000000
C	3.6122777	0.50000000
B	10.0000000	1.00000000
B	10.0000000	1.00000000
D	5.6234132	0.75000000
C	3.1622777	0.50000000
B	10.0000000	1.00000000
E	7.4989421	0.87500000
D	5.6234132	0.75000000
B	10.0000000	1.00000000
F	8.6596432	0.93750000
E	7.4989421	0.87500000
B	10.0000000	1.00000000
G	9.3057204	0.96875000
F	8.6596432	0.93750000
G	9.3057204	0.96875000
H	8.9768713	0.95312500
F	8.6596432	0.93750000
G	9.3057204	0.96875000
I	9.1398170	0.96093750
H	8.9768713	0.95312500
I	9.1398170	0.96093750
K	9.0579777	0.95703125
H	8.9768713	0.95312500
K	9.0579777	0.95703125
L	9.0173333	0.95507812
H	8.9768713	0.95312500

dente ſibi Logarithmo; verùm cùm D ſit adhuc minor quam 90000000 inveniendus eſt inter B & D alius E, cum ſuo pariter Logarithmo; atque hæ operationes tamdiu urgendæ, donec tandem inveniatur medius Geometrice proportionalis vel exacte vel quàm proxime adæquans numerum 90000000; hunc autem invenies nonniſi poſt repertos 25 Geometrice proportionales; nam 26tus EE erit quæſitus, cui competet Logarithmus 0,95424251.

Eâdem methodo invenies Logarithmum Numeri 6; nam inter repertum antea D 5,6234137, qui minor eſt quam 6,0000000, & hunc ipſum quærito tamdiu medios proportionales, dum prodeat 6,0000000 cum

§ 101.

L	9.0173333	0.95507812
M	8.9970796	0.95410156
H	8.9768713	0.95312500
L	9.0173333	0.95507812
N	9.0072008	0.95458984
M	8.9970796	0.95410156
N	9.0072008	0.95458984
O	9.0021388	0.95434570
M	8.9970796	0.95410156
O	9.0021388	0.95434570
P	8.9996088	0.95422363
M	8.9970796	0.95410156
O	9.0021388	0.95434570
Q	9.0008737	0.95428467
P	8.9996088	0.95422363
Q	9.0008737	0.95428467
R	9.0002412	0.95425415
P	8.9996088	0.95422363
R	9.0002412	0.95425415
S	8.9999250	0.95421889
P	8.9996088	0.95422363
R	9.0002412	0.95425415
T	9.0000831	0.95424652
S	8.9999250	0.95421889
T	9.0000831	0.95424652
V	9.0000041	0.95424271
S	8.9999250	0.95421889
V	9.0000041	0.95424271
X	8.9999650	0.95424080
S	8.9999250	0.95421889
V	9.0000041	0.95424271
Y	8.9999845	0.95424217
X	8.9999650	0.95424080
V	9.0000041	0.95424271
Z	8.9999943	0.95424223
Y	8.9999650	0.95424080
V	9.0000041	0.95424271
AA	8.9999992	0.95424247
Z	8.9999943	0.95424223

V	9.0000041	0.95424271
B B	9.0000016	0.95424259
A A	8.9999992	0.95424247
B B	9.0000016	0.95424259
C C	9.0000004	0.95424252
A A	8.9999992	0.95424247
C C	9.0000004	0.95424252
DD	8.9999998	0.95424250
A A	8.9999992	0.95424247
C C	9.0000004	0.95424252
E E	9.0000000	0.95424251
DD	8.9999998	0.95424250

§ 102.

ſuo Logarithmo 0, 7781512. Eodem plane modo invenito Logarithmum Numeri 7.

§ 102. Verùm hunc Herculeum inveniendorum Logarithmorum laborem iſtud ſolatur, quòd Logarithmi complures alii ſint, qui magna facilitate obtineantur. Sic Logarithmus Numeri 9 diviſus per 2 largitur Logarithmum Numeri 3, qui eſt Radix de 9 *. Et quia 6 diviſum per 3 præbet 2, invenies Logarithmum de 2 *per* § 99. Hic ipſe duplicatus ſiſtit Logarithmum de 4 *. Logarithmi de 2 & 4 ſibi additi producunt Logarithmum de 8. Et quia 10 diviſum per 2 dat 5; & hujus Logarithmus dabitur *per* § 99. Ex hactenus inventis erues plurimos alios, ſcil. Logarithmos de 12, 14, 15, 16, 18, 20 &c. Inter 10 autem & 12, item inter 12 & 14 invenito Logarithmos de 11 & 13 eodem artificio, quo illum de 9 &c. Facillime item inveniuntur Logarithmi Numerorum decuplo, centuplo, vel milſecuplo majorum: nam ut habeas Logarithmum de 90, adde Logarithmo de 9 illum de 10, fiet 1.9542425 1. Et Logarithmus de 900 erit 2.9542425 1. Atque viâ hucusque explanatâ totus condi poteſt Canon Logarithmorum, qui nunc vulgo extat ab 1 usque ad 10000 incluſive,

* § 97.

* § 97

§103. alieno pridem labore operoſe compoſitus. Rariores ſunt Tabulæ Briggianæ a Vlacco completæ, quæ continent Logarithmos Numerorum ab 1 ad 100000 incluſive.

§ 103. In Logarithmis prima nota commate vel puncto abſciſſa dicitur *Characteriſtica:* docet namque, cujus ordinis ſit Numerus naturalis illi reſpondens. Numeri enim Logarithmorum, habentium characteriſticam 0, ſunt Monadici; habentium characteriſticam 1, ſunt Decadici; habentium 2, ſunt Centenarii &c. & ſic deinceps.

G	Logarithmi.
1	0.000000
2	3.010300
3	4.771212
4	6.020600
5	6.989700
6	7.781512

§ 104. Numeri naturales columnæ G quemadmodum certâ ratione collati aut a ſeſe diſtantes efficiunt Proportionem Geometricam, ita eorundem Logarithmi incedunt proportione Arithmetica. Proportionem Geometricam diſcretam conſtituunt 2:3::4:6, & Arithmeticam diſcretam Logarithmi 3010300, 4771212, 6020600, 7781512. Geometricam continuam conſtituunt 1:2::2:4, & Arithmeticam continuam eorundem Logarithmi.

NOTANDA

Adhuc quædam circa uſum Logarithmorum.

§ 105. I. Datis tribus terminis 5:321::712, invenire, per Logarithmos, quartum proportiona-

lem Geometricum. Quære in Canone Logarithmico duorum Numerorum 32 & 712 Logarithmos, eosque in unam Summam S colliges: ab hac Summa ſubtrahe Logarithmum primi 5, reſiduum x dabit Logarithmum, quem quæres in Tabula Logarithmorum, & indicabit is tibi Numerum naturalem, quartum proportionalem. Si quando Logarithmus x in Tabulis exacte non reperiatur, (ùt in præſente Paradigmate accidit) accipies ex illis Logarithmum proxime minorem (utì hîc Logmum 3.6585837) ejusque numerum naturalem 4556.

32	L.	1.5051500	§105.
712	L.	2.8524800	
	S.	4.3576300	
		0.6989700	
	x	3.6586600	

II. Logarithmus modò inventus x eſt Logarithmus de 4556 ac inſuper de fractione huic adhærente. Hanc fractionem ut invenias, ſubtrahe ex Logarithmo invento x, 3.6586600, proxime minorem 3.6585837, differentiam 763 nota. *Secundò*, ſubtrahe Logarithmum dato x minorem (ſcil. Logmum 3.6585837) a Logarithmo in Tabulis proxime majore, ſcil. a Logarithmo Numeri 4557, & differentiam 953 similiter nota. *Tertiò*, Applicetur nunc Regula Proportionis h.m. Differentia major 953 poſtulat 1. (differunt enim Numeri 4556 & 4557 ſolâ unitate) quid poſtulat Differentia minor 763? & invenies $\frac{763}{953}$. Ratio: Quando duorum quorumcunque numerorum x & z, unitate diſtantium, Logarithmi differunt differentiâ non admodum magnâ nec plura millia tranſcendente, ſed moderatâ; v.g. 100 vel 1000 vel 953 unitatum; tunc ſi intermediis numeris $x \dagger \frac{1}{953}$, $x \dagger \frac{2}{953}$, $x \dagger \frac{3}{953}$ &c. & ſic deinceps usque ad $x \dagger \frac{953}{953}$ (i.e. usque ad majorem z.) aſſignes ſuos Logarithmos, hi in eadem proxime ratione creſcent, qua numeri intermedii, adeo ut vi Regulæ Proportionis poſſit ex Logarithmorum incremento cognoſci incrementum numerorum intermediorum, & viciſ-

§105. ſim. Quære ſi numerorum x & z Logarithmi A & C differant unitatibus 953, & inter hos medius ſit Logarithmus B, qui ſuperet minorem A unitatibus 763; pariter autem numeri ipſi x & z concipiantur diſtare unitatis partibus 953, atque inter hos medius exiſtat Logarithmi B numerus y; etiam ipſe y continebit ſupra x unitatis partes 763, i.e. fractum $\frac{763}{953}$. Atque hæc inveniendæ fractionis methodus utcunque accurata erit, quando Logarithmus indicat numerum Integrum, qui inter 1000 & 10000 contineatur. Sin numerus naturalis in Tabulis infra 1000 exiſtat, fractio ſecundùm datam mox Regulam ſæpe notabiliter aberrabit a vera, eoquod Logarithmi numerorum inter 1 & 1000 comprehenſorum differant differentiis longe majoribus, quam ii, qui 1000 tranſcendunt. Itaque ut fractionem veram aut veræ propinquam eruas, ita procedes: Dati Logarithmi (A 1.3869446), cujus numerum naturalem quæris, characteriſticam (1) muta in aliam 3, & quære in Tabulis Logarithmum dato proxime minorem; occurret 3.3868555 Numeri 2437: Sed hic Numerus eſt centuplo
* § 96. major Numero Logarithmi dati A * (nam ejus Logarithmus coaluit ex additione Logarithmorum A & 2.0000000;) ergo ſi dividatur per 100, obtinebis Logarithmi A numerum 24 cum fractione $\frac{37}{100}$, veræ ſatis propinqua: nam etſi Logarithmus 3.3868555 deficiat adhuc a Log. 3.3869446, defectus tamen ille non excedet partem unam centeſimam. Tabulæ Briggianæ exactiores adhuc fractos ſuppeditabunt.

III. Si occurrat Logarithmus major iis, qui in Canone extant v.g. B. 5.8734670; ut huic ſuum aſſignes Numerum, quære in tabulis (characteriſticâ datâ 5 in 3 priùs mutatâ) Logarithmum proxime minorem illo B, & invenies A 3.8734369, cujus Numerus eſt 7472, quæ ſunt quatuor primæ Numeri inveſtigandi notæ, aliæ poſteriores ſic eruuntur. Subtrahe Logarithmum inventum A ex mutato B, reſiduum 301 auge tot Zeris, quot notas

ultra 4 primas inventas petis: conſtat autem Logarithmo characteriſticæ 5 competere numerum ſex notarum, * adeoque reſiduum auge duobus Zeris, ut fiat *m* 30100. Divide hunc *m* per differentiam inventi A & proxime ſequentis C 3.8734950, quæ eſt 581; Quotum 51 vel proxime 52 pone poſt inventas 7472, exurget 747252, Numerus inveniendus. Ratio: In operatione præſcripta implicite hæc inſtituitur Proportio, ut 581:301::100:52, quæ ita noſtræ accommodatur materiæ: Si inter Numerorum 7472 & 7473 Logarithmos A & C medius ſtatuatur Logarithmus mutatus B, tunc ſi A & C differant unitatibus 581, B ſuperabit ipſum A unitatibus 301: & ipſorum A & B Numeri erunt, ut 7472 ad $7472\frac{301}{581}$ vel $\frac{52}{100}$. Atqui iſthoc Numero, $7472\frac{52}{100}$, centuplo major eſt Numerus erutus 747252 (nam $100 \times \frac{52}{100} = 52$*;) igitur ejus Logarithmus eſt datus B 5.8734670 *. §105. * §103. * §61 & 57.

Si reſiduo 301 adjicias plures quam duos Zeros, & ex quoto tot primas notas apponas Numero 7472, quot requiruntur, reliquæ dabunt fractionem decadicam. Sic Logarithmo 4.5524118 reſpondet Numerus $75678\frac{94}{100}$. * §102.

IV. Si deſideres Logarithmum Numeri majoris quam 10000, modò Numerum 10000000 non excedat (v.g. Logarithmum B Numeri 3567894,) is in hunc modum invenietur. *Primo*, quære in Canone Logarithmum quatuor primarum figurarum 3567 (notando, quot notæ reſiduæ maneant; manent autem hîc tres 894) invenies Log. A 3.5523031. 2*do*, ſubtrahe mox inventum Log. A ex proxime ſequenti C, & nota differentiam 1217. 3*tio*, hanc duc in reſiduas numeri dati notas 894, & ex Producto 1087998 abſcinde tot notas poſtremas, quot ſuprà reliquæ notatæ fuerant, nempe hîc abſcinde tres 998, reſiduum 1087 adde invento Log. A, exurget, Log*mus*. B 3.5524118, cujus characteriſticam ſi rite mutes in aliam, ſcil. hîc in 6, ut fiat 6.5524118; habebis quæſitum. Sic etiam Logarithmus de 3647093 eſt 6.5619468. Ratio: In hac opera-

§105. tione implicite hæc elicitur Proportio, 1000 : 894
:: 1217 : 1087, & *commutando* 1217 : 1087 :: 1000 : 894.
Nempe ſi inter Logarithmos A & C, differentes
partibus 1217, intermedius ſtatuatur B, qui ſupra
A contineat $\frac{1087}{1217}$; etiam ipſorum A & B Numeri
erunt, ut 3567 ad 3567$\frac{1087}{1217}$ vel $\frac{894}{1000}$. Sed hoc
Numero, 3567$\frac{894}{1000}$, millecuplo major eſt Nume-
rus noſter 3567894: ejus proinde Logarithmus eſt
idem B, mutatâ modò characteriſticâ 3 in aliam 6.

V. Si Numeri cujuſpiam (v.g. 1257) Radicem
quadratam quæras, ejus Logarithmum 3.0993353
divide per 2, quotus dabit Logarithmum 1.5496676,
* § 97. cui reſpondet numerus 35, Radix quadrata *, quâ
* C. 4. exactiorem invenies per approximationem *. *Vel*,
§. 79. Num. II. Numerus 35 $\frac{45}{100}$ * dabit Radicem veræ propin-
quiorem. 2*do*, ut Numeri (v.g. 12570) Radicem
cubicam invenias, ejus Logarithmum 4.0993353,
divide per 3, proveniet 1.3664451. Logarithmus
* § 98. Numeri 23 $\frac{25}{100}$, Radicis cubicæ *.

VI. Uſurus Canone Logarithmico, præſertim
pro Regula Trium, brevius operabere, ſi in quo-
vis Logarithmo reſeces duas notas poſteriores, id-
que citra notabilem calculi defectum.

CAPUT VI.

De Permutatione et Combinatione.

Hanc materiam minime omittendam putavi, quòd magnam utilitatem præſtet Scientiis variis & Artibus, poſſitque jure merito Inſtrumentis Modiſque ſciendi annumerari. Hujus artificio multa quotidie nova in lucem protrahentur. Egregie famulatur Rhetoricæ tum ſacræ tum profanæ, cùm aut argumenta e locis Inventionum eruta, aut ea quæ in ſermonem cadere poſſunt, diverſimode inter ſeſe confert & componit: qua de re plura P. Izquierdo, in Pharo Scientiarum, & P. Kircherus in Arte Magna ſciendi. Juvat

Logicum in condendo Argumentationum artificio, aliiſque pluribus; Phyſicum, Chymicum in producendis novis Experimentis. Et vero unde tanta Experimentorum atque artificioſorum phænomenorum farrago, niſi quòd varia ſubjecta aut caſu aut ſtudio fuerint inter ſeſe comparata? Phyſicum certe vita prius quam faciendorum ejusmodi experimentorum ubertas deſtituet, ubi combinatione rite uſus fuerit. Emolumentum non leve perſenſit Muſicus quidam Melotheta, quem de ſtupenda permutandarum notarum multitudine aliquando edocueram. In Optica aliiſque ſcientiis Kircherus noſter, quòd Combinationem impenſius coleret, plura nova invenit. Multa profecto in Diſciplinarum Palæſtris ſolide nequeunt tractari & explanari absque Combinationis adminiculo: nam ſine hac multa jacebunt ſuis tenebris involuta, multa ſilentio prætérita, quæ tamen ad pleniorem illius, quod executis, argumenti cognitionem faciunt. §106.

Cæterum multi Permutationem & Combinationem promiſcue accipiunt: utramque P. Schottus recte ita diſcriminat.

§. 106. DEFINITIO I. *Permutatio* eſt rerum plurium ſecundùm ordinem poſitio: ita ut in nova quavis poſitione alio ſe ordine conſequantur.

DEFINITIO II. *Combinatio* eſt plurium rerum datarum, quoties poſſunt, acceptio & conjunctio in binarios, ternarios, quaternarios &c. Si in ſingulis hujusmodi combinationibus res ſemper diverſæ, nunquam eædem ponantur, vocabuntur *Combinationes ſtrictæ*.

PROPOSITIO XXXVI. *Problema.*

§ 107. *Invenire, quoties poſſit rerum certo numero comprehenſarum poſitio mutari.*

I. Duæ res nonniſi bis permutari poſſunt, ùt patet in *a b*, *b a*.

II. Tres res *a*, *b*, *c* ſexies permutari poſſunt. Nam ſi quævis littera primum locum

§107. ſemel occupet, duæ poſteriores poterunt inter ſe bis permutari; unde naſcentur bis tres i.e. ſex permutationes.

III. Quatuor res *a*, *b*, *c*, *d* permutationes ſubeunt viginti quatuor. Nam quælibet datarum litterarum ſemel occupare poteſt locum primum; quod dum fit, reliquæ tres poſteriores permutari poſſunt ſexies, adeoque dantur permutationes $4 \times 6 = 24$.

IV. Sic oſtendam quinque res permutari poſſe 120^{es}, ſex res 720^{es} &c. Ex quibus colliges & deduces hanc inveniendarum permutationum Regulam: Reperturus permutationes omnes rerum v.g. ſeptem, quære prius numerum permutationum rerum comprehenſarum numero datum immediate præcedente (i.e. rerum 6), hunc quæſitum (720) multiplica per (7) numerum rerum, quarum permutationem inveſtigas, Productum (5040) dabit petitum. Hanc juxta Regulam condita eſt Subjecta Tabula, ex qua diſcis admirandam ſane multitudinem permutationum.

Sic, ut exemplis quibusdam utar, 10 *homines plusquam ter millioneſies poſſunt accumbere eidem menſæ, ſervato quavis vice alio ordine, idque per annos* 1025. *Litteræ Alphabeticæ* 24 *immanem admittunt permutationum numerum, usque adeo, ut ſi* 1,000; 000, 000 *ſcriptores ſinguli quotidie ſcriberent* 40 *paginas, quarum ſingulæ contineant* 40 *diverſos litterarum ordines, totum permutationum opus vix abſoluturi ſint intra annos* 1,000; 000, 000. *Hæ ipſæ permutationes omnes ſi libris inſcriberentur juxta ſeſe collocandis, tota Globi Terraquei ſuperficies minor erit, quam ut capere libros omnes poſſit, ut demonſtrat P. Schottus in Magia Univerſali. Ars Anagramminatica hîc mirum ſubſidium, Muſica inexhauſtum tum inventionum tum variationum theſaurum inveniet.*

Tabula

Tabula Permutationum. §108.

1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800
11	39916800
12	479001600
13	6227020800
14	87178291200
15	1307674368000
16	20922789888000
17	355687428096000
18	6402373705728000
19	121645100408832000
20	2432902008176640000
21	51090942171709440000
22	1124000727777607680000
23	25852016738884976640000
24	620448401733239439360000

a b c
a c b
b a c
b c a
c a b
c b a

a b c d	c d a b
a b d c	c d b a
a c b d	c a d b
a c d b	c a b d
a d b c	c b a d
a d c b	c b d a
b a c d	d a b c
b a d c	d a c b
b c a d	d b a c
b c d a	d b c a
b d a c	d c a b
b d c a	d c b a

PROPOSITIO XXXVII. *Theorema.*

§ 108. *Tres Numeri* a, b, c (*ſimiliter quatuor* a, b, c, d, *aut quinque, aut quotcunque alii*) *quocunque ordine inter ſe multiplicati, idem ſemper Productum generant.* Utemur hic multiplicatione Algebraica.

DEMONSTRATUR I. Tres numeri *a*, *b*, *c* nonniſi ſex admittunt permutationes huc appoſitas: ex quibus quatuor aſteriſco notatæ

§108. * abc, acb, * bac, bca, * cab, * cba generant idem Productum, ùt liquet *ex* §. 22 *Axiom.* 4, ſi $a\,b$ vel $b\,a$ habeas pro Multiplicando, & c pro multiplicatore. Atqui etiam producta * abc, acb, bca ſunt æqualia: nam quia ùt $ab : ac :: b : c$, erit $abc = acb$ **, & porro $acb = bca$ *. Ergo &c. *Q. e. d.*

** Pr. 7.

* § 22. Ax. 4.

II. Idem demonſtro de 4 numeris a, b, c, d. Nam admittunt hi 24 permutationes per 4 ſenarios, in quorum ſingulis quilibet datorum numerorum obtinet primum locum. Accipiamus primum ſenarium hîc expreſſum,

$abcd$
$abdc$
$acbd$
$acdb$
$adbc$
$adcb$

$bacd$

in quo cùm Producta trium poſteriorum litterarum omnia ſint æqualia *, iſthæc multiplicata per idem a manebunt æqualia. Similiter oſtènditur Producta cujusvis alterius ſenarii eſſe æqualia. Jam vero unum Productorum primi ſenarii (v.g. $abcd$) eſt æquale Producto ſecundi ſenarii ($bacd$;) nam (ob abc vel $acb : acd :: b : d$) eſt $abcd = bacd$. Pari ratione, ſequentium ſenariorum Productum unum aliquod eſt æquale Producto alicui ſenarii præcedentis: unde omnia 24 Producta ſunt æqualia inter ſe.

* Num. præced.

III. Idem pariter demonſtrabis de numeris quinque, vel ſex, pluribusve aliis.

§ 109. *SCHOLION.* Demonſtrari nunc plura poſſunt, quæ omiſsâ hac Propoſitione obſcura fuiſſent, quæque apud Algebraiſtas ſine hac non ſatis firma conſiſtunt. Ita oſtendi nunc poteſt, quod

§ 86. *Schol.* 2. indicatum, datis duabus pluribusve §109.
Rationibus v.g. $a:b$, & $A:B$, Productum ex Antecedentibus (aA) ad Productum ex Conſequentibus (bB) dicere Rationem talem, cujus Exponens ſit (ef) Productum ex Rationum datarum Exponentibus.

$$\left[\begin{matrix} 2:4 & 6:18 \\ a:b & A:B \\ e & f \end{matrix}\right.$$

Nam ſi pro b ponis $= ae$, & pro $B = Af$ *, licebit Producto bB, ſubſtituere iſtud $aeAf$ vel $aAef$. Atqui ut $aA : aAef :: 1 : ef$, ubi ef eſt Exponens Rationis poſterioris; ergo & erit prima $aA : aAef$ vel $aA : bB$. *Q. e. d.* Similiter ſi fuerint tres Rationes $a:b$, $A:B$, $\alpha:\beta$, & eorum exponentes e, f, g; Exponens Rationis $aA\alpha : bB\beta$, eſt efg. Nam mutatis terminis b, B, β, in æquivalentes hîc appoſitas, eſt $aA\alpha : aA\alpha efg :: 1 : efg$. Et ſic deinceps. Atque nunc demum nihil obſtat, quominus dicatur, deſignatis quibusvis Rationibus, eſſe Productum Antecedentium ad Productum Conſequentium in Ratione Compoſita deſignatarum Rationum.

$$\left[\begin{matrix} a : ae \\ A : Af \\ \alpha : \alpha g \end{matrix}\right.$$

* Pr. 30.

PROPOSITIO XXXVIII.

§ 110. *Explicantur reliqua ad Permutationem & Combinationem pertinentia.*

I. Quando rerum permutandarum aliquæ non ſunt diverſæ, ſed ſimiles (uti in voce JESVS ſimiles ſunt litteræ binæ S, S,) cupias autem habere ſolas diverſarum permutationes, ita procedes: Accipe ex ſuperiore Permutationum Tabula permutationem totius numeri rerum propoſitarum, qui hîc eſt 120: hunc divide per numerum permutationum rerum ſimilium, qui hic eſt 2; quotus (60) indicabit, quoties poſſit Totum permutari. Ita vox AMARA quinque lit-

§110. terarum, ſed trium ſimilium admittit tantùm permutationes 20.

II. Ex dato numero rerum e.g. 8 (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*) combinationes omnes ſtrictas reperire. *Primo*, Combina *a* cum omnibus ſequentibus, provenient 7 combinationes *a b*, *a c*, *a d*, *a e*, *a f*, *a g*, *a h*: deinde *b* cum aliis ipſam ſequentibus, eodem modo *c*, & *d* &c. Habebis omnes binarios diverſos, numero 28. *Secundo*, Inventos hactenus binarios conjunge cum ſingulis litteris ipſos ſequentibus, ut fiat *a b c*, *a b d*, *a b e* &c. invenies diverſos ternarios 56. *Tertio*, ſi conjungas inventos ternarios cum ſequentibus litteris, ut fiat *a b c d*, *a b c e*, *a b c f* &c. invenies quaternarios 70. Et ſic deinceps; provenientque adhuc quinarii 56, ſenarii 28, ſeptenarii 8, univerſim combinationes 246.

FINIS.

O. A. M. D. G.

APPENDIX
AD
ARITHMETICAM,
Continens
Animadverſiones quaſdam & Additamenta ad nonnullos ex præcedent. §§.

Additamentum I.
ad Schol. §. 12.

Ratio, cur Additione rite peractâ, poſt abjectos tum e Summa tum Addendis novenarios, maneat utrinque æqualis numerus, fundatur potiſſimum in eo, quòd novenarius unitate excedat denarium; inde enim fit, ut 10 ſit = 9 † 1, & 11 = 9 † 2, & 12 = 9 † 3, 13 = 9 † 4 &c. Ubi vides, membra æquationis, abjecto novenario, eſſe æqualia quoad numerum unitatum ſimpliciter & ſine reſpectu ad gradum ſuum acceptarum, ſcil. 10 ipſi 1, & 11 ipſi 2 &c. Similiter 20 æquatur Numero 18 ſive novenario bis ſumpto † 2, vel 20 = 2 × 9 † 2. 30 = 3 × 9 † 3. 100 = 99 † 1. 200 = 2 × 99 † 2 &c. ita ut abjectis, quoties poſſunt, novenariis, remaneant utrinque totidem unitates ſimpliciter acceptæ. Atque ut hæc applicemus præſenti Paradigmati (unitates quasvis rurſus ſimpliciter acceptando) cùm (8 † 6) ſit = 14, & 14 = 9 † 5, hinc ſi ex poſterioris æquationis membro poſtremo i.e. ex Addendis rejicias 9, reſiduum unitatum, nempe 5, æquatur numero unitatum in Summa, ſcil. ipſius 14 vel 1 † 4,

	3	2	7	5
	8	7	4	6
	4	4	3	8
1	3	1	8	4
1 †	2 † 1	† 1	7 † 1	† 4

plicatione ipſe oritur, prima, 4, ducatur in Multiplicandum, deinde in hoc productum pars altera 6, quo facto ultimum Productum dabit quæſitum. Sic multiplicaturus A 2678. per 24, duces primùm 4 in A, fiet 10712; iſtud multiplica per 6, proveniet productum 64272. Plus fortaſſe eruditionis quam utilitatis hæc habet operatio. Uſui tamen nonnunquam erit in reductione ſpeciei majoris ad minorem, atque in Regula Proportionis. Sic reducturus 627 florenos ad baceos, multiplica datum numerum per 3 & 5, nam 3 × 5 = 15. Ubi prima Multiplicatio dabit capitella, altera baceos.

IV.

ADDITAMENTUM
ad Propoſit. 5.

Tabellarum Neperianarum beneficio perquam commode & ſecure ita inſtituitur diviſio. Sit A dividendum per D. Quære & diſpone diviſorem in

A 2 4 5 0. 6	D 3 6 5
B 2 1 9 0	Q 6
C 2 6 0 6	

fronte lamellarum, Indice appoſito, uti *Figura* 3. monſtrat. 2do, quære, deſcendendo, primum diviſionis membrum 2450 in aliqua ſerierum; quodſi, ut plerumque fit, hoc exacte ibidem non reperiatur, accipe numerum proxime minorem, qualis hic occurret in ſerie *l m*; Atque Numerus Romanus Indicis, ſcil. VI, indicat quotum *6*, in Q ſcribendum. 3tio, ſeriem inventam *l m* deſcribe & ſcribe infra primum membrum, ut in B factum cernis. Subtrahe; Reſiduo adjunge Dividendi notam 6, & circa numerum C operare ut ante. Verbo, operatio eſt eadem, quæ § 36. *Modo* 2do: Tabulæ id tantùm commodi præſtant, quòd illico oculis ſiſtant verum quotum, aliàs difficulter inveniendum; præterea quòd ſeries Quoti ſimul exhibeat productum ex quoto in diviſorem. Auctor ſim, ut in operationibus prolixioribus & alicujus momenti hic lamellarum uſus non ſpernatur; utilitatem ipſa praxis commendabit.

Suggerunt iſthæc nobis modum etiam ſine Tabulis (quamvis paulo tardiùs negotium conficiatur) inveniendi quotum legitimum, ſi (prout oſtendimus in Additam. præced.) componas varia diviſoris multipla usque ad ejus noncuplum: tum enim ſi diviſionis membrum conferas cum diviſoris multiplis, illico deprehendetur quotus.

Alio modo fit diviſio Numeri v.g. 2679, per diviſorem 24, diſperſum in partes 3 & 8, ex quarum multiplicatione oritur, ſi primò dividas 2679 per partem 8, deinde quotum erutum $334\frac{7}{8}$ per partem alteram 3; fiet $111\frac{1}{3} + \frac{7}{24} = 111\frac{15}{24}$.

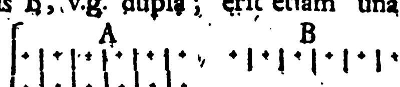
Modus dividendi 2dus §. 36. admittit compendia quædam; ùt ſi abſoluto primo membro, Dividendi notam ſequentem ſola mente, non calamo, accenſeas 2do membro: item ſi ex Modo 1mo & 2do excogitetur quidam tertius.

ADDITAMENTUM V.

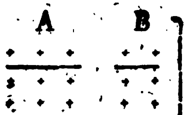
ad Propoſit 7.

In ipſo Proportionum limine conſulto abſtinebamus a Fractionibus Tironi obtrudendis. Nunc vero moneo, Propoſitionis VII * Demonſtrationes etiam Fractis convenire. Quod ut intelligas, præmitto illud, quod citra omnem Demonſtrationem claret: Si quantitates A & B ſecentur in totidem partes æquales, utraque v.g. in partes ſex, ſitque A multipla ipſius B, v.g. dupla; erit etiam una partium in A dupla unius partis in B;

* Conf. Pr. 31.



& duæ partes in A ſunt duplum duarum partium in B, tres trium &c. demum ùt Totum ad Totum, ita partes ſimiles ad ſeinvicem; & viciſſim. Præterea ſi numerus A ſe habeat quomodocunque ad alium B, v.g. ùt 3 ad 2; erit ùt A ad B, ita pars certa de A, v.g. $\frac{2}{3}$, ad aliam ſimilem partem, $\frac{2}{3}$, de B. Quæ omnia punctorum (vel linearum in certas partes



divisarum & ſubdiviſarum) Schemate redduntur evidentia, & fruſtra pluribus exponuntur intelligenti Cap. II. Axiom. 6. Corollar. & Propoſition. 9. Fractorumque doctrinam. Hoc præmiſſo, ſi occurrat hæc Proportio A $\frac{1}{2}$: B $\frac{2}{3}$: : C $\frac{1}{4}$: D $\frac{1}{3}$; reductis ad idem Nomen duobus primis, vel omnibus terminis, erit A $\frac{3}{6}$: B $\frac{4}{6}$: : A × C $\frac{3}{6} \times \frac{1}{4}$:
* § 52. : B × C $\frac{4}{6} \times \frac{1}{4}$, hoc eſt, cùm jam ſit A ad B, ut 3 ad 4 *, erit ipſius A pars quarta ad partem quartam ipſius B, velut 3 ad 4 &c. Reliquum Demonſtrationum ex dato hoc filo ipſe pertexes.

Neque vero Propoſitio 7. duntaxat, ſed & alia ſparſim de Numeris Integris aſſerta, E.G. in Propoſit. 9, 10, & 11, Numeris Fractis congruent;
* Conf. Pr. 30. p. 2. item Axioma 4. § 22. * Etenim primò tam ex $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$, quam ex $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$, produci idem $\frac{6}{20}$, patet tum ex ipſo § 22, tum § 62. *Secundo.* Tam e × B, quam B × e producet idem A: primum liquet ex § 19. alterum oſtendo

A	B
3	5
$e\,\frac{3}{5}$	

* § 62. in appoſito Exemplo. B × e vel $\frac{5}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{5}$ *, & $\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$; nam cùm numerator hîc oriatur ex 3 × 5,
*Cap. II. Def. 5. Cor. 1. erit ut 1 ad 3, ita 5 ad 15 *; proinde $\frac{15}{5} = \frac{3}{1}$ ** = 3 vel A. Hactenus explicata faciunt ad amplio-
** § 53. Cor. rem quarundam illuſtrium Propoſitionum lucem & firmitudinem.

VI. ADDITAMENTUM *ad* § 49.

Datis tribus terminis proportionalibus (v.g. 234 : 468 : : 23) faciliùs reperitur quartus, ſi attendas ad Rationem duorum primorum terminorum; quam ſi videas poſſe minoribus terminis exprimi (v.g. per 1 : 2, ubi exponens eſt 2) expeditiſſima eſt operatio, ſi Antecedens (23) aut multiplicetur
* Prop. 39. Cor. (ſi Ratio fuerit minoris æqualitatis *) aut dividatur (ſi Ratio fuerit majoris æqualitatis) per Exponen-

tem (2): ùt ſi *hîc* accipias duplum de 23. i.e. 46. Pariter, datis 123:248::30:x, invenies poſtremum x, ſi Exponentem primæ Rationis, nempe 2 † $\frac{2}{123}$ ducas in tertium terminum 30; inde namque reſultabit x = 60 † $\frac{60}{123}$. Et datis 23:48::234, invenietur eâdem praxi quartus 468 † $\frac{468}{23}$, vel 488 $\frac{8}{23}$. Inventurus, quid lucri importent 2635 floreni per annum, dum centeni foenerantur florenos 5; pone pro Ratione 100:5, hanc 20:1, & proportionem perfice; erit ùt 20:1::2635:131 $\frac{15}{20}$. Ubi prætera vides, quando terminus ſecundus eſt 1, ſola diviſione, ſi vero 1 fuerit primus, ſola multiplicatione opus eſſe.

ADDITAMENTUM VII.

ad Propoſ. 21.

Quando tres termini dati fracti ſunt, compendioſa erit operatio, ſi primæ fractionis termini invertantur, ac tum Numeratores, deinde Denominatores in ſeſe ordine ducantur, ut producta generent fractum quæſitum. E.G. $\frac{2}{3}$ ulnæ conſtant $\frac{3}{4}$ floren. quanti conſtant $\frac{3}{5}$ ulnæ? Poſitis ita terminis, $\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{5}$, prodibit $\frac{27}{40}$. RATIO, Quia (per Propoſitionem VII, etiam Fractis applicandam) mediorum $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$ productum, = $\frac{9}{20}$, eſſet dividendum per $\frac{2}{3}$, vel (*ex* §. 65) per $\frac{3}{2}$: univerſa autem hæc operatio perficitur juxta præſcripta. Nota adhuc I^mo^, ſi inter tres terminos datos unus tantùm ſit fractus; etiam reliqui fracti fiant, ſupponendo illis unitatem. II. Si ſint duo Integri & unus mixtus, mixti Integer reducatur ad fractum ſuum & conjungatur cum eo *. E.G. datis, 2:3 $\frac{1}{2}$::4, fiet $\frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{28}{4} = 7$. * § 57.

Si poſita hac quæſtione: 7 ulnæ conſtant florenis 2, quanti ulnæ 3? Productum mediorum ſit minus, quam ut poſſit methodo ordinaria dividi per primum; pro obtinendo quarto termino multiplica per ſe medios (2 & 3) & producto 6 ſuppone

primum, ceu Denominatorem; fiet $\frac{6}{7}$. Rationem dabis ex paulo ante dictis: nam ut $\frac{7}{1}$, vertendum in $\frac{1}{7}$, ad $\frac{3}{1}$, ita $\frac{2}{1}$, ad $\frac{6}{7}$.

VIII. ## ADDITAMENTUM *ad* § 79.

Inter veritates Mathematicas celeberrima extat illa, qua aſſeritur, dari numeros & quantitates Irrationales ſeu incommenſurabiles. Viſa hæc Antiquis fuit myſtica ac humano ingenio ſumme digna: hinc nihil illâ priſcos apud Philoſophos notius, usque adeo, ut Ariſtoteles inter pecudes reponendum dicat eum, qui incommenſurabilitatem lateris cum Diagonali Quadrati (de qua nos in Geometria) ignoraret. Hanc nos veritatem breviter hîc elucidamus, ne Tiro curioſus & ſciendi avidus neceſſe habeat illam ex Euclide ejusve Commentatoribus moleſtius haurire. Eam in rem præmittendæ primo

DEFINITIONES.

I*ma*. *Primus* vel *incompoſitus Numerus* eſt, quem nullus ab ipſo diverſus Numerus, ſed ſola unitas metitur. Tales ſunt 2. 3. 5. 23. 29 &c. *Compoſitus Numerus* eſt, quem præter unitatem alius adhuc ab ipſo diverſus metitur. Tales ſunt 4. 6. 15 &c.

II*da*. *Primi inter ſe Numeri* ſunt, quos nulla alia menſura communis metitur, quam unitas. Tales ſunt 1 & 3. 8 & 15. Item 8. 10, 15. ſunt tres primi inter ſe. II. *Compoſiti inter ſe Numeri* ſunt, quos præter unitatem aliquis Numerus, ceu communis menſura metitur. Tales ſunt 8 & 10 menſurabiles per 2; 15 & 30 menſurabiles per 5. *Corollarium*. A 8. B 15] Si fuerint Numeri A & B primi in- D 4.] ter ſe, & alius ab his, D, metiatur alterutrum datorum, v.g. ipſum A, erit D primus ad reliquum B. Secus enim A & B non forent primi, ſed jam compoſiti inter ſe.

NOTA. I. Dum *Numeri* vocabulo hîc utimur, ſermo nobis ſolùm erit de numero Integro, niſi expreſſim aliud addatur. II. Unitas metitur omnem Numerum; proinde hujus nonniſi pars aliquota eſſe poteſt.

THESES.

THESIS I. Numeri A & B, omnium ſibi proportionalium minimi, æque metientur alios ſibi proportionales C & D. *Vel*: Ut datis minimis in ſua proportione numeris A & B aſſignes alios majores C & D, datis proportionales; debent C & D eſſe æque multipla ipſorum A & B. *Demonſtr.* Ob A:B::C:D, & A:C::B:D, erunt A & B majorum C, D vel partes ſimiles aliquantæ vel aliquotæ. Non autem ſunt aliquantæ: ſi enim hoc, tunc A (qui hîc nequit eſſe unitas) contineret taliter quantitatem O (minorem ipſo A) ceu aliquotam ipſius C, qualiter B continet ſimilem aliquotam P ipſius D * (*Ut ſi A, pars aliquanta, foret duæ 5tæ de C, & B duæ 5tæ de D; ùt ſe A habet ad O, unam v.g. 5tam ipſius C, ita & B ſe haberet ad P, unam 5tam ipſius D.*) Porro O & P tanquam aliquotæ ſimiles continerentur æque ſæpe in ſuis Totis C, D, adeoque O:C::P:D, * & permutando, eſſet O ad P, ùt C ad D ſive ùt A ad B. Ergo cùm nunc O, P tanquam minores & contentæ intra A, B ſint his proportionales, numeri A, B non erunt minimi in ſua proportione, contra ſuppoſitum. Reſtat igitur, ut A, B ſint ſimiles partes aliquotæ, ac proinde æque metiantur ipſos C, D. *Corollarium.* Et ut datis Numeris C, D, invenias alios A, B, proportionales minores ac minimos; debent C, D poſſe per aliquem tertium numerum exacte dividi.

A 2 . B 3.
O . P
C 6 . D 9.

* § 42. Def. 2.
* § 42. Def. 9.

THESIS II. Si A & B fuerint primi inter ſe, erunt omnium ſibi proportionalium minimi. Et viciſſim. *Demonſtr.* Si enim primum non; dentur (ſi fieri poteſt) alii Q, *q*, proportionales minimi. Ergo

A 8. B 15.
D
Q. q.

Q, *q* æque metientur ipſos A, B (*ex Theſi* 1) per eundem D, adeoque A & B habebunt nunc communem menſuram, contra ſuppoſitum. *Secundò* Si Numeri A & B ſint minimi, nec tamen primi, habebunt juxta te communem menſuram D, quæ metiatur ipſum A per Q, & B per *q*, adeoque erit ùt
*Pr. 11. A ad B, ita quotus Q ad quotum *q* *. Igitur A & B non jam erunt minimi proportionalium, contra hypotheſin; cùm Q & *q* ſint ipſis A & B minores.

A 3. B 7.
C 8
A × B. 21
D—Q—

THESIS III. Si duo Numeri A, B, primi fuerint ad C; etiam genitus ex A × B primus erit ad C. Si enim (A × B) & C non ſint primi inter ſe; utrumque metiatur D, & quidem ipſum A × B per Q. Erit
* Pr. 6. D × Q = A × B *, atque inde A : Q :: D : B *, &
* Pr. 7. p. 2. A : D :: Q : B. Jam vero cùm A, C ſint primi, &, juxta te, D metiatur ipſum C, erunt & A, D primi inter ſe (*per Def.* 2. *Coroll.*) atque ſua in proportione minimi (*per Theſ.* 2) ac æque metientes numeros ſibi proportionales (*per Theſ.* 1.), videl. A ipſum Q, & D ipſum B. Sed D, juxta te, metitur etiam ipſum C, adeoque nunc ambos C & B; ergo C & B non ſunt primi inter ſe, contra ſuppoſitum. Ergo &c. *Corollar.* I. Si duo Numeri (A 7, B 4) ſint inter ſe primi, etiam (A A) quadratus unius ad alterum B primus erit. Patet ex appoſita terminorum diſpoſitione.

A. A.
B

Inde fluit *Corollarium* II. Si duo Numeri (A 2, B 3) ſint primi inter ſe, etiam eorum quadrati (A A 4, B B 9) primi inter ſe erunt. Nam ob A, A, primos ad B, tales etiam erunt A A, B; & exinde ob B, B primos ad A A, tales etiam erunt B B, A A. Simili ratiocinio oſtendero, primos etiam eſſe Cubos A A A, B B B.

THESIS IV. Si Numerorum continue proportionalium (A, B, C) primus non metiatur ſecundum, nec metietur tertium C. *Demonſtr.* A eſt

ad C in Ratione duplicata Rationis 2 : 3 * vel $\frac{2}{3}$, cujus termini ſupponuntur eſſe primi. Atqui Ratio iſta duplicata exprimitur per $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$, i.e. per quadratum terminorum $\frac{2}{3}$; hujus autem quadrati termini $\frac{4}{9}$ ſunt & ipſi primi inter ſe (*per Coroll.* 2. *præc.*) Ergo A & C, vi ſui Exponentis, ſunt primi inter ſe. *Q. e. d.* Similiter demonſtravero, A nec metiri quartum proportionalem aut quintum &c. Nunc tandem delabimur ad demonſtrandam Propoſit. 14. L. 8. Euclid.

A 2. B 3. C $4\frac{1}{2}$ (Ratio $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$) * Pr. 31. Cor. 2.

THESIS V. Si Numerus quadratus A A metiatur quadratum B B, etiam Numerus Radicalis A metietur Radicem B. Nam ponantur A A, A B, B B, tres continue proportionales in Ratione A : B *. Jam cùm A A metiatur BB; etiam A A metietur ipſum A B (ſi enim hoc non, igitur nec A A metietur ipſum B B, *per Theſ. præc.*, quod evertit hypotheſin.) Sed ùt A A ad A B, ita A ad B; ergo etiam A metitur ipſum B. *Q. e. d.* Poteſt ſimili ratiocinio oſtendi, ſi Numerus Cubicus alium cubicum, nempe A A A, ipſum B B B, metiatur, etiam fore, ut Radix A metiatur alteram B. Ex hac porro Propoſitione quemadmodum deducatur Numerorum quorundam Irrationalitas ſeu Ratio, quæ nullis poſſit numeris exprimi, luculenter oſtenſum fuit §. 79. Ex quo porro ſequitur, ſi Numeri cujuſpiam Quadrati Radix vera non ſit Numerus Integer, eam nec fore mixtum nec pure Fractum. Obſerva tamen, quamvis Radices ſint Irrationales, earum nihilominus Quadrata poſſe eſſe Numeros Rationales; item dari poſſe duas Radices ſurdas, quarum Ratio poſſit exprimi numeris. Vide P. Tacquet Arithmet. L. 3. C. 7.

A 2. B 4.
AA. 4. AB. 8. BB 16

* § 43. Ax. 6. Cor. vel Pr. 7. p. 2.

Errata.

Pag. 14. Linea 10. pro, *A in B*, lege, B in numerum A. Pag. 20. lin. ult. pro, C ✕ D, lege, C † D. Pag. 27. lin. 25. *antea inventum*, adde: & dele diviſorem. Pag. 36. in Num. II. Schemate, Numeris, *7. fl. 14. bac. 3. xr.* ſubſcribe Reſiduum: 18. fl. 8. bac. 3. xr. Pag. 36. in Num. IV. Paradigm. pro, *d* 200, lege, 185. Pag. 42. l. 8. pro, *manebit*, erit &c. Pag. 46. l. 29. *manet Proportio*, adde: Ita datis 7 : 5 : : 14 : 10, ſi utrobique ex 7 quintis ſubtrahas quinque, manebit utrinque ſimilis reſpectus 2 quintarum ad 5 quintas. Pag. 57. l. 28. pro, *fractationes*, fractiones. Pag. 69. l. 18. pro, *opponendo*, apponendo. Pag. 72. l. ult. pro, *hac*, hæc. Pag. 74. l. 17. pro, *explicata*, applicata. Pag. 80. l. 1. pro, *perdicularem*, Perpendicularem. Pag. 88. l. 21. pro, 2 (*a* † *b*), lege, 2 (a † b) ✕ c. Pag. 91. l. 5. pro, *fuerit*, fuerat. Pag. 103. l. 27. pro, *35tæ*, lege, *3ſtæ*. Pag. 105. l. 7. pre, C *f* ✕, C ✕ f. Pag. 117. l. 21. pro, *in qua*, in quarum prima.

INSTITUTIONUM MATHEMATICARUM

OPUSCULUM II.

GEOMETRIA.

AUTHORE

P. FRANCISCO HUBERTI, S. J.



Cum Permiſſu Superiorum.

FRANCOFURTI AD M. ET MOGUNTIÆ,

Sumptibus FRANCISCI VARRENTRAPP.

MDCCLIV.

PROOEMIUM.

Cum anniverſaria Nili exundatio [a] Ægyptiorum agros & limites confunderet; fluminis hujus accolæ olim Artem ejusmodi ſibi excogitandam ſumpſerunt, qua lites & jurgia reſecarentur, confuſa rurſus diſcernerentur, ac poſſeſſorum cuique ſuum reſtitueretur. Quæ quidem Ars tunc *Geometriæ* [b] nomine recte continebatur. Verum cùm altius exculta novis ſagacitatis humanæ inventis magnopere amplificaretur; nomen quidem primum Geometriæ retinuit; aſt hujus vim longius egreſſa, ad omnem trinæ dimenſionis proprietatem, ad ipſos etiam Cœlos dimetiendos ſeſe extendere cœpit.

Thales Mileſius annis ante Chriſtum Natum circiter 600. ex Græcia in Ægyptum profectus [c] Geometricas inſtitutiones ab Ægyptiis

(a) Strabo L. 17, Herodotus, Proclus Geometriæ initia huic annuæ Nili inundationi tribuunt. Ariſtoteles L. 1. Met. C. 1. Geometriam ab Ægyptiis Sacerdotibus inventam affirmat; forte quòd his ceu religioſioribus arbitris agrorum diviſio demandaretur.

(b) *Geometria* ex Etymo nominis eſt *Terræ dimenſio*.

(c) Teſte Diogene Laërtio in vita Thaletis, invenit ille Propoſitiones, quæ in Elem. Euclidis L. I. ſunt 5ta, 15. 26. & L. III, 31. Menſus eſt ex Pyramidum umbra harum altitudines.

Sacerdotibus hauſtas primus in Patriam invexit. Pythagoras Samius, Thalete paulo ætate inferior, Geometriam non coluit modo, ſed & egregie auxit [d]. Ex Pythagorica ſeu Italica Schola prodiere præclari Geometræ, Anaxagoras Clazomenius, Oenopides [e], Zenodorus. Quos ſecutus eſt Hippocrates Chius, qui primus indicavit Problematis Deliaci [f] ſolutionem per duas Medias proportionales. Annis ante C. N. 430 orbi & Geometriæ bono natus eſt Plato Academicorum Philoſophorum Princeps. Neminem is ſuas ad Scholas admittendum duxit, niſi Geometriæ præceptionibus fuiſſet antè inſtitutus; unde foribus ſuis hanc præfixit Epigraphen: ὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω, *Nemo Geometriæ expers huc ingreditor.* Academicorum porro Schola illuſtres peperit Viros, de Geometria ſingulariter meritos, Leodamam, Archytam & a Geometria & a Mechanica celebrem, Theætetum, Leontem, Eudoxium Gnidium [g], Xenocratem, cujus diſcipulus Ariſtoteles quam fuerit in Geometricis verſatus, oſtendunt ejuſdem Libri locis Mathematicis referti.

(d) Invenit Propoſitiones 32. 44. 47. Libri I. Elem. Euclid.
(e) Huic Proclus adſcribit inventas Euclid. L. I. Prop. 12. & 23.

(f) Cùm peſte Athenis ſæviente, Apollo Deliacus ex Oraculo reſpondiſſet, ceſſaturum malum, ſi Aram ſuam Cubicam duplicarent; mirum; quam ſolerter Geometrarum ingenia in Cubi duplicationem poſtea incubuerint. Idem Hippocrates primus tentavit, ſed non felici ſucceſſu, Circuli Quadraturam, i.e. modum, quo reperiretur Quadratum, areæ circulari exacte æquale.

(g) Teſte Græco Scholiaſte invenit illam inſignem Proportionum doctrinam, quæ conficit Quintum Euclidis Librum.

Geometrarum placita varia & inventa in unum volumen collegit Hippocrates Chius, primus ipſe Elementorum Geometricorum conditor. Poſt hunc Elementa ſcripſerunt & amplificarunt Archytas, Leon, Theudius Magnes. His demum omnibus ſuperior eminet immortalis nominis Vir Euclides [h], qui quod a Majoribus fuerat præclare inventum & traditum, tum de ſuo auxit, tum in Libros 13 Elementorum [i] meliore ordine digeſſit, ac demonſtrationibus roboravit [k]. Floruit ante C. N. annis 300. Hæc ego Euclidæa Elementa dum volvo, mirari ſatis nequeo tum incredibilem priſcorum Philoſophorum ardorem, quo, neglecto pene mundo reliquo, animum totum in ſtudia Mathematica tranſtuliſſe videntur, tum ſubtiliſſimam mentis aciem, qua illi intra paucorum Sæculorum ſpatium in lucem protraxerunt abditiſſima Matheſeos arcana; & admirandas illas veritates, in quibus fere ſolis ſumma humani ingenii vis elucere ſolet. Nec raro mecum ipſe dubitare ſoleo, utrum noſtri

(h) Iſtum multi confundunt cum Euclide Megarenſi. Sed noſtrum Geometram ab hoc diverſum fuiſſe, bene docet ex Diogene Laërtio P. Clavius in Prolegom. Commentar. in Libros Eucl.

(i) Horum Elementorum Libros, & Propoſitiones præcipuas recenſebimus ad calcem hujus Opuſculi, pag. 133.

(k) Sunt, qui affirmant, Euclidem poſuiſſe nuda Propoſitionum argumenta, nullis additis harum demonſtrationibus, quas Theoni tribuendas contendunt. Verum pro Euclide pugnat primo Procli teſtimonium. 2do, quod Pappus comparet Euclidis demonſtrationes cum illis aliorum, & Boëthius ipſasmet Euclidis demonſtrationes uſurpaverit. 3tio, Si ſolos Propoſitionum titulos relinquere nobis Euclides voluiſſet, alium profecto harum ordinem conſtruxiſſet, nec cum tenuiſſet, qui cùm minus rebus ipſis congrueret, Propoſitionum tamen nexui ſerviebat, quo poſteriores ex anterioribus arctâ conſequentiarum ſerie eliciebantur.

ævi homines, ſi nullam a Majoribus Matheſin accepiſſent, tantos æque ac illi profectus in ſcientia iſthac facturi eſſent. De qua re eo dubitandum magis erit, ſi ſuperioribus Geometris accenſeas Archimedem Syracuſanum [l], quem P. Taquet appellat humanæ ſubtilitatis apicem, & Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem. Obiit annis ante C. N. 212 [m].

Archimedi coævus extitit Eratosthenes egregius Geometra juxta ac Aſtronomus. Memorandi deinde Hipparchus (qui ſesqui Sæculo ante C. N. vixit); Hypſicles Alexandrinus; & (50 ante C. N. annis) Theodoſius, qui planorum & Circulorum in Sphæra proprietates per tres Libros demonſtratas ad nos transmiſit.

Primo Chriſti Sæculo Menelaus Trigonometriæ, ab Hipparcho excogitatæ, incrementa dedit: quod argumentum altero a Chriſto Sæculo amplius expolivit & contraxit Ptolomæus Aſtronomorum Princeps. Quintum Sæculum protulit Dioclem; Sporum; Proclum, qui Euclidis Librum I. commentario illuſtravit; Pappum Alexandrinum, inſignem Mathematicum; Theonem item Alexandrinum, qui Euclidis Libros 13. doctis commentationibus exornavit; demum Eutocium Aſcalonitam.

(l) Primus invenit Rationem Cylindri ad Sphæram tum ſecundum ſuperficiem, tum ſoliditatem; pariter Rationem Diametri Circularis ad ſuam peripheriam. Plura ſcripſit & invenit: at non omnia adnos pervenerunt.

(m) Cùm urbs Syracuſana a Romanis expugnaretur, Marcellus Imperator ſuis præcepit, Archimedem ut incolumem ſervarent. Tum vero Militum unus ad Archimedem penetrat, ſtudiis Mathematicis intentum; quem, quis eſſet, cùm interrogat, Archimedes reponit: *Noli turbare meos Circulos*: quo reſponſo ille efferatus virum nobiliſſimum trucidat.

Poſterioribus Sæculis cùm Barbararum gentium irruptiones Muſas in antra relegaſſent; etiam cum his Matheſis proſtrata jacebat, niſi quod Arabes in Chriſtianorum terras infuſi & libros Mathematicos deprædati ſtudiis iſtis magnopere delectari cœperint *.

Sæculum VII. VIII. IX. X. vix obſcuri nominis Geometram Chriſtianum tulit.

Sæculo XI. Campanus Gallus Euclidem ex Arabico Latinum fecit & Scholiis elucidavit.

Sæculum XIII & XIV. Geometris ſterile fuit.

Sæculum XV nobilitarunt Joannes Regiomontanus, in Franconia natus; Frater Lucas de Burgo ex Ordine Minorum; Nicolaus de Cuſa, S.R.E. Cardinalis. Bartholomæus Venetus Euclidem ex Græco in Latinum tranſtulit, Campani verſionem longius a Græco abire cauſatus °.

Sæculo XVI. Studium Geometriæ, uti & reliquæ Matheſeos, magis quam ante incaluit. Commentarium in Euclidis Libros vel omnes vel ſex priores ediderunt, 1516 Federicus Com-

(n) Nono Chriſti Sæculo apud Arabes Mathematicæ diſciplinæ florebant, Cardanus inter 12 orbis miracula locum 10. aſſignat Alchindo Arabi, qui libellum de quantitatibus reliquit: hoc enim nihil ingenioſius eſſe deprædicat, Ab hiſce deinde Arabibus præter ſervatum Euclidem accepimus Characteres Arithmeticos hodie uſitatos, utpote quos primùm in Hiſpaniam intulerunt, ex qua circa A. 1000. ad cæteras Europæ gentes traducti ſunt.

(9) Genius hujus Sæculi fuit, ut in vertendis Authoribus toti eſſent, fidelitatem potius ſectarentur, quam ſcientiam promoverent; quod in materia ſcientiarum eſt nugari; totum enim Euclidem ſus deque verterem, ſi breviori methodo & clariori eadem demonſtrare poſſem. Neque enim tam quærendum eſt, quod Authores ſignificare voluerunt, quam quod debuerunt. Verba ſunt Patris De Chales in Tract. Proœm.

mandinus Urbinas; 1530 Orontius Finæus, Franciſci I. Galliar. Regis Mathematicus; 1532 Franciſcus Maurolyceus, Abbas Meſſanenſis; 1550 Joannes Scheubelius; 1557 Jacobus Peletarius Cenomannus; 1565 Chriſtianus Herlinus; 1578 Franciſcus Fluſſates Candalla, ex nobili Gallorum familia nobilis Geometra. Addidit de ſuo Librum 16. Verum ut taceam alios Commentatores minus illuſtres, omnibus palmam præripuit P. Chriſtoph. Clavius S. J. rigidiſſimus in demonſtrando, copioſus in illuſtrando, perſpicuus ſimul in explicando (p). Atenim ad Tironum captum nemo felicius Euclidem adaptavit P. Andreâ Taquet S. J. Viro ſummis Geometris adnumerando, qui claritatem, brevitatem & ſoliditatem inter ſe miro artificio copulavit (q): nec minorem laudem meretur ejusdem tum Cylindricorum & Annularium pertractatio, tum Geometria Practica 1669 edita. Aurea quoque brevitate & perſpicuitate Euclidis Librum I, III, V & VI Tironibus accommodavit P. Jacobus Gooden S. J. ſubjunctâ brevi Trigonometriâ Planâ & Sphæricâ, ac Geometriâ Practicâ. Inter Geometras Principes reponendi adhuc ſunt, illuſtria duo ſuperioris Sæculi lumina, P. Bonaventura Cavallerius Mediolanenſis Ordin. Je-

(p) Scripſit idem præterea Geometriam Practicam & Trigonometriam, præter alia non pauca ad Matheſin mixtam pertinentia.

(q) Qui Taquetum, & in Taqueto emendatum Euclidem legere deſiderat, adhibeat ejusdem Elementa Geometriæ cum notis Whiſtoni, quæ in Anglia prodiere, & nuper Romæ unà cum Trigonometria Sphærica R. P. Boſchowich S. J. atque Sectionibus Conicis Guidonis Grandi.

ſuatorum, de quo mentio rurſus occurret pag. 103; & P. Vincentius a S. Gregorio S. J. qui clariſſimis & innumeris prope inventis Geometriam auxit. Alios, quorum laudibus nihil detractum volumus, ne juſto longiores ſimus, tacendo præterimus.

Juvat nunc breviter commemorare, quibus acceſſionibus locupletata fuerit recentiorum temporum Geometria, & queis prærogativis illam antiquorum ſuperet. Primo, aditus ad Euclidem, qui nonniſi raris aut Heroicis ingeniis ante patebat, nunc complanatis ſalebris, pronus eſt effectus, ſubſtitutis nimirum demonſtrationibus directis, brevioribus & multo facilioribus. Stereometriam præprimis & Archimedem longe faciliorem reddiderunt Patris Taquet induſtria, & Cavallerii indiviſibilia. Ratio Diametri Circularis ad Peripheriam multo accuratior determinata. Ex P. Guldini S. J. invento, per methodum Centrobaryciam amplus dimenſionibus Geometricis campus apertus. Trigonometria operâ Regiomontani (r), Copernici, Joachimi Rhetici, Pitiſci, Clavii, Snellii, Cavallerii, Lansbergii, Taqueti, & Neperi non ſatis laudandâ Logarithmicâ, ex incunabulis ad plenam ætatem provecta fuit. Geometria Practica, antehac ſatis imperfecta, a Petro Ramo, Clavio, Stevino, Schotto, Taquero, De Chalio, aliisque ad magnam perfectionem adducta. Quis vero enu-

(r) Primus is eſt, a quo Canonem Trigonometricum accepimus, poſito Radio 600000. Obiit 1476. Sæculi ſequentis anno 1556 prodiit ejusdem Canon alter ad Radium 10000000, aliorum curâ (ſecus ac pag. 49. a nonnullis ſcriptoribus deceptus notavi) luci datus.

meret amplam illam & omnigenam utiliſſimorum Inſtrumentorum ſupellectilem, quibus ditata recentioribus ſæculis fuit? Geometria autem ſublimior, quæ circa ſectiones Conicas & curvas lineas occupatur, a Carteſio, P. Gregorio a S. Vincentio, Newtono, Leibnitio, Eulero; recentius a Deidiero, aliisque eo usque promota eſt, ut, quo ultrà aſcendat, vix quidquam ſupereſſe videatur. Verum de hac Geometria abſtruſiore nullus nobis in hiſce Elementis ſermo erit; unde neque attigimus antiquos illos Geometras, qui ejus olim fundamenta poſuere, alibi opportunius ſuo loco recenſendos.

Ad Geometriæ fata etiam illud, quod ſequitur, pertinet. Ab Euclide adusque medium Sæculi XVII. diuturnâ temporum & conſuetudinis præſcriptione iſta veluti lex invaluerat, ut nequis ad Geometriam niſi per ſola Euclidis Elementa tenderet. Verum Arnaldus, 1669 P. Honoratus Fabri S J., 1671 P. Ignatius Gaſton Pardies S. J., P. Mourgues S. J. 1685 P. Bernardus Lamy Oratorii Presbyter, ſepoſito Majorum præjudicio novas vias ad Geometriam pertentarunt. Venerabantur illi quidem Euclidem ceu Geometrarum Solem, cui tamen ſui etiam nævi adhærerent; nec eum illi talem arbitrabantur, cui nihil aut addi aut demi poſſet.[s] Quare

(s) Reprehendebant alii in Euclide, quod in Elementa ſua concervaſſet plura, quæ nulla demonſtratione eguiſſent, multa quæ exigui momenti eſſent. Nam ſi ex ejusdem 4 poſtremis Libris utiliora reſeces; reliqua, quæ partem potiſſimam & maximam conficiunt, durum corticem ſine nucleo præbent. Et cui bono illa ampla de Incommenſurabilibus & Solidis regularibus doctrina? Adde Libros VII. VIII. IX num. quòd de numeris agant, ex claſſe Elementorum Geometricorum eſſe abolendos. 2do. Diſplicebat multis Euclidæus

neglecto Euclidæorum Librorum & Propoſitionum ordine, omiſſisque iis, quæ minus neceſſaria cenſebant, Geometriæ placita ex meliore magisque nativo ordine, contexuerunt. Quæ res complurium ſequacium conſenſu probata fuit. Nam priorum veſtigiis inſtitere Sturmius, Malezieu, Wolffius, Crouſazius, Deidierius, RR. PP. Corſini & Fortunatus a Brixia, aliique præſtantes viri. Quos ego Duces (non ſine ſelectu tamen & conſilio) imitatus, hoc opuſculum eâ formâ, eaque ratione adornavi, quam Tironum & captui & utilitati maxime accommodatam judicabam. Malui diſcentes via brevi per pauciora ſed præcipua Geometriæ Theoremata ad utiliſſimarum praxeon amœna vireta deducere, quam per longas Propoſitionum am-

ille ordo, quo partim Libri ipſi diſponebantur, partim in Libris ipſis Propoſitiones digerebantur. Nam in Libro I. quam diſparatis locis collocantur Propoſitiones 4ta, 8, 24, 25, 26, quas ſibi vicinas eſſe oportebat. Satis ſcilicet habebant veteres (ut advertit Sturmius) Theorematis alicujus illuſtrioris veritatem certiſſimis argumentis firmaſſe, quocunque demum circuitu & longa Propoſitionum ſecundariarum ſerie ac tantum non per integros Libros id perfeciſſent. 3tio. Eſto totum Euclidem teneas, nondum conſecutus es Circuli dimenſionem, Sphæræ ſoliditatem aut ſuperficiem, nondum Trigonometriam, nondum Geometriam Practicam. Quis igitur improbare auſit illorum conatus, qui iſthæc ita inſtituunt & contrahunt, ut intra idem tempus, quo vix medium Euclidem percurrere licuiſſet, univerſa hæc utilius emenſus ſis? Contendit equidem P. De Chales (qui ſibi ipſi adverſatur ſupra in notam. ſub litera o) nefas eſſe Euclidæum ordinem invertere, propterea quod Authores ſoleant ejus Propoſitiones ſecundum ordinem ſuum citare: verùm cùm id hodie minus frequenter atque olim fiat, & incommodo huic aliis modis occurri poſſit, prout jamjam occurrerunt non pauci ex iis ipſis, qui ab Euclide diſceſſionem fecerunt, nosque ſub calcem hujus opuſculi idem præſtaturi ſumus; objecta ratio tanti eſſe non debet, ut in ejus gratiam curſum faciliorem difficiliori remoræ, prolixitati brevitatem, inſtitutioni minus commodæ magis fructuoſam poſtponamus.

bages fruſtra fatigare. Siquis nihilominus Geometriam hanc noſtram cum Euclide comparaverit; inveniet, opinor, in ea vix quidquam omiſſum eſſe, quod ad utilem Geometriæ inſtitutionem magnopere expeti poſſet. Eſt autem Sapientiæ pars etiam aliqua, quædam ignorare, nec ad omne, quod ſciri poteſt, diffundi. Anceps initio hæſitabam, præſtaretne Practicam Geometriam totam a Theoretica ſejungere: verum Amici ſuaſu determinatus, Theorematibus ſparſim admiſcui praxeos aliquid, quò Tiro tum ſpeculationis fructum aliqualem deguſtaret, tum ipſas veritates Theoreticas per Corollaria practica altius animo infigeret. Geometriæ tamen Practicæ partem potiſſimam a Theoretica diſcrevi: hoc enim ut fieret, rerum pertractandarum natura, ordo & methodus poſtulabant.

MONITUM
AD
TIRONEM.

Imo Qui mediocrem ſolùm, non tamen inutilem Geometriæ cognitionem ſibi deſiderat comparare, huic ſufficiet ex hoc libello diſcere ſequentia. Ex Part. I. Cap I. Articulum I. Ex Cap. II. Articulum I. Prætermiſſâ Trigonometriâ, ſeſe in praxibus Partis II exerceat, omiſſis iis, vel ſaltem eorum demonſtrationibus, quæ hinc inde cum Trigonometria connectuntur. Ex Parte III, quantum volet, præſertim Caput II. Cui vero nec animus nec ingenium deeſt ad pleniorem Geometriæ doctrinam adipiſcendam, etiam ad Trigonometriam & quæ reliqua ſunt, mentem adjiciat. Iſtud autem ſedulum Tironem etiam atque etiam moneo, ut Partis I Caput II ſibi perquam familiare reddat. IIdo. Spondeo facilem per reliquam Geometriam curſum, ſi modo in ipſo limine poſt Definitiones Articuli I. tibi bene perſpectas feceris quinque primas Propoſitiones, quæ tamen ipſæ facillimæ ſunt: cæteræ enim Propoſitiones omnes vel inſtar Corollariorum ex his pauciſſimis primis promanant, vel per harum variam applicationem demonſtrantur. IIItio. Illud etiam diſcentis laborem multùm levabit, ſi primo Figuras ipſas proprio Marte delineaveris vel in ſeparato libello, vel mobili charta, quam de pagina

ad paginam transferre liceat, vel in charta libro inſerta atque e regione ipſius Propoſitionis aut loci, quò illæ ſpectant, ut quam proxime in conſpectu ſint. 2do, *ſi, dum Propoſitionem aliquam aggrederis, illius Figuram de novo deſcribas, non integram quidem, qualem in Tabulis vides, ſed primo eas ſolum lineas ducas, quæ ad ſtatum Quæſtionis & nudum Propoſitionis argumentum ſufficiant; ſedulo notando & diſcernendo data & cognita, a non datis aut incognitis; poſtea demum alias & alias lineas Figuræve partes, prout in Problematis vel demonſtrationis ſerie indicantur, adjicias. Quare proderit notos datosque angulos parvis arcubus, ut e g. fit in Fig.* 29 *circa Angulos* r & s, *diſcernere a non datis, & lineas datas vel lineolis transverſis vel alio pro lubitu excogitato ſigno diſtinguere a non datis.* IVto. *Ne te morentur Figuræ, ſiquando minus accurate exprimant, ad quod aſſumptæ fuerant. Sufficit, quod vi imaginativæ utcunque ſiſtant rem repræſentandam: neque a Chalcographis Geometriæ expertibus obtineri ſemper exigive poteſt optatum ectypum. Porro eadem Figura, ſemel indicata, etiam ad ſequentes §phos eousque extenditur, quoad nova indicetur.* Vto. *Si poſt ſuperatas Propoſitiones primas Elementares non omnia ubique reperis minutim explicata; id tuî gratiâ factum cogita, ut nempe & tibi meditandi ac inveniendi locum aliquem non injucundum relinquerem: ſolet namque veritas proprio ſtudio quæſita & multo ſuavius & majore luce in mentem illabi. Neque tamen quidquam premo eorum, quæ nequeas vel ex antecedentibus, vel ex ipſis rei propoſitæ adjunctis facile perſpicere.*

Adjeci ſub finem Tabulam contractam Sinuum; ut qui Trigonometricis operationibus delectatur, vulgari autem Sinuum & Logarithmorum Canone deſtituitur, habeat, unde neceſſitati ſuæ conſulat.

Notationes marginales quomodo legendæ, in Arithmeticæ Proœmio jam explicui. Inter novas, cujusmodi eſt pag. 8. *E. I.* 1. *vel alibi E. III.* 18 *&c. ſignificat litera E*, Euclidem; *I vel II vel III &c. ejusdem* Librum Imum *vel II vel III &c. & reliqui minores numeri*, 1. 2. 3. 18 *&c. libris adſcripti, horum* Propoſitiones.

Errata præcipua, quæ notata reperies pag. 144. *ante lectionem hujusce libelli corrige. Reliqua vel minora (præſertim circa quædam marginalia) vel quæ aciem fugerunt, facile ipſe corriges.*

ELENCHUS OPUSCULI.

PARS I.

Theoria Magnitudinis longæ & latæ.

Caput I. Propoſitiones Elementares.

ARTICULUS I. Definitiones, Axiomata. - pag. 1.

ARTICULUS II. Primariæ proprietates Linearum, Triangulorum & Parallelogrammorum. - 11.

ARTICULUS III. Circuli primariæ affectiones. 25.

Caput II. De Proportione.

ARTICULUS I. De Proportione Figurarum magis ſimplicium, nempe Triangulorum - - 33.

ARTICULUS II. De ſimilitudine Figurarum Quadrilaterarum & Polygonarum. - - - 41.

PARS II.

Problemata præcipua circa Lineas & Superficies.

Caput I. Præmittitur Trigonometria. p. 47.

Caput II. Problemata Euthymetriæ, ſive de Lineis.
ARTICULUS I. De Lineis Rectis - - pag. 64.
ARTICULUS II. De Lineis Circularibus & Polygonorum - - - - - - - 71.
ARTICULUS III. Dimenſio Diſtantiarum & Altitudinum - - - - - - - 81.
ARTICULUS IV. De locorum planorum Ichnographia - - - - - - - - 88.
Caput III. Epipedometria; ſive de Superficiebus.
ARTICULUS I. Menſuratio Figurarum planarum ſecundum ſuperficiem - - - - 93.
ARTICULUS II. Figurarum planarum in alias æquales transmutatio. - - - 97.
ARTICULUS III. Gæodeſia, ſeu Plani in certas partes diviſio. - - - - - - 99.

PARS III.

De Solidis ſeu Corporibus.

Caput I. Solidorum Theoremata præcipua. Pag. 103.
Caput II. Problemata Stereometrica.
ARTICULUS I. Corporum dimenſio ſecundum ſoliditatem - - - - - - - 120.
ARTICULUS II. Solidorum dimenſio ſecundum ſuperficiem. - - - - - - 124.
APPENDIX. De Figuris tum Planis, tum Solidis, augendis vel minuendis. - - - - 127.

INSTITU-

INSTITUTIONES GEOMETRIÆ.

Geometria eſt Scientia, quæ verſatur circa Quantitatem continuam, vel extenſionem in longum, latum, & profundum.

PARS I.

Theoria Magnitudinis Longæ & Latæ.

CAPUT I.

Propoſitiones Elementares, reliquæ Geometriæ baſis & fundamentum.

ARTICULUS I.

DEFINITIONES; AXIOMATA; POSTULATA.

§. 1. DEFINITIO I. *Punctum* eſt in Magnitudine illud, quod partibus caret.

§. 2. DEFINITIO II. Linea eſt Magnitudo ſolùm longa. *Concipitur generari ex fluxu Puncti, veſtigium aliquod relinquentis.* Linearum alia *Recta*, quæ ab uno puncto ad aliud in directum ita extenditur, ut nihil in

Tab. I. ea ſit flexuoſum. Alia *Curva*, quæ a Recta deficit. *Simplici* Lineæ *nomine deinceps ſemper Rectam comprehendemus*.

SCHOLION. Inſtrumentum, quo lineæ Rectæ deſcribuntur, *Regula* vocatur. Hujus bonitas ita examinatur. Deſcribatur juxta Regulam Linea; tum Regulam ita inverſam, ut ejus extremitas prius dextera jam ſiniſtra ſit, rurſus applica lineæ mox deſcriptæ; quacum ſi Regula etiam nunc congruit, bona & recta eſt; ſecus vitioſa erit.

§. 3. DEFINITIO III. *Superficies* eſt Magnitudo ſolum longa & lata.

§. 4. Superficierum alia *Plana*, cujus nulla pars alterâ aut depreſſior aut altior. Alia *Convexa*, qualis eſt illa Globi. Alia *Concava*, qualis Cœlo tribuitur &c.

Multæ ſuperficierum poſſunt concipi generari ex fluxu lineæ, veſtigium continuo relinquentis. Hoc pacto ex fluxu lineæ Rectæ * AD, usque in BC motæ, generabitur ſuperficies ABCD. * Fig. 3.

§. 5. DEFINITIO IV. *Corpus* eſt Magnitudo longa, lata & profunda. E. G. Cubus. *Fig.* 4.

SCHOLION in præcedentes Definitiones.

§. 6. Concipe Ens quodpiam (ſive diviſibile ſit ſive indiviſibile, perinde habet) extenſum in formam Cubi * ABEGD. Si in hoc contempleris *primo* ſolam terminationem planam ABCD, abſtrahendo ab omni alia Cubi proprietate, v.g. profunditate; ſi *ſecundo* ſolam hujus plani terminationem AB: concepiſti cum fundamento in re primò ſuperficiem, 2do lineam; eſto nec ſuperficies illa ABCD, nec iſta longitudo AB poſſit reapſe divelli ac ſeparari a ſuo Corpore. In hac linea AB abſtractim ſumpta, mente ſolum expende ejus extrema: concipis cum fundamento in re quidpiam in Magnitudine, non extenſum & partibus carens, quod Punctum vocamus. Puncta itaque Mathematica conveniunt cum Zenoniſticis, quòd indiviſibilia ſint; differunt ab his, quòd Zeno ſua phyſice exiſtere atque ex horum multitudine Continuum componi affirmaverit; Mathematicus ſua, vi mentis abſtractiva, cum * Fig. 4. & 5.

ſundamento in re concipiat. Qui Puncta Zenonica in Geometriam admitteret, is multis ſe tricis indueret, E. G. Lineam conflatam ex punctorum numero impari dividi non poſſe biſariam; lineam biſectam, compoſitam ex punctis etiam infinitis, ablato uno non poſſe amplius ſecari biſariam &c. cujus generis plura erudite obmovet *P. Honoratus Fabri S. J.* Metaph. L. 10. Prop. 6. 19. 20. intelligens tamen *l. c.* per puncta poſitiva Mathematica illa Zenonis, & per Ariſtotelica; noſtra Mathematica. Tab. I.

Mathematicus itaque dum cogitat Lineam A B * dividi biſariam in *a*, concipit lineæ A B partem *a A*; æqualem parti *a B*, & haſce partes ſeſe tangere ſuis extremitatibus *a* & *a*; ac locum contactûs (qui partibus conjunctis nihil extenſionis addit) mente notat. Pariter dum Linea * C M ſecat Triangulum A B C in duas partes planas X & Z; conſiderat partes haſce conjungi ſecundum extremitates ſuas (C M & C M) ſolum longas, & locum contactûs, qui partibus conjunctis nihil latitudinis addit, ceu lineam notat. Hanc autem mentalem lineam; aut imaginationis juvandæ cauſa, aut in gratiam Tironis; repræſentat in charta linea craſſiore phyſica. Ita & corpora ſecta, ſecundum ſuperficies Geometra conjungit.

* Fig. 1.

* Fig. 7.

Ex dictis intelligi poteſt; quam immerito multi rem Geometricam confundant cum compoſitione Continui Phyſici; de qua re pulchre diſſerit Philoſophia Burgund. in Phyſ. General. mihi p. 130. Edit. Norimb. 1681.

§. 7. DEFINITIO V. *Figura* eſt Magnitudo undique clauſa termino vel terminis.

Circulus clauditur unâ lineâ rotundâ, Globus ſuperficie una convexa, Triangulum A B C * tribus lineis. Figurarum alia Plana, alia Solida &c. Spatium intra planarum terminos exiſtens vocatur *Area*: & termini iſtam claudentes, *Figuræ Perimeter*.

* Fig. 6.

§. 8. DEFINITIO VI. *Circulus* eſt Superficies plana perfecte rotunda.

Circulus *generari* concipitur, dum Recta * C A, fixo manente puncto C, in plano circumacta in orbem, ſuî veſtigium quoddam continuo relinquit. Punctum C vocatur *Centrum*. Extremitas rotunda circulum claudens, *Peripheria*; Linea A B tranſiens per

* Fig. 8.

Tab. I. Centrum, & utrimque in Peripheriam terminata, *Diameter*; Recta CA ex centro ad Peripheriam ducta, *Radius* vel *Semidiameter*; Portio aliqua Peripheriæ *Arcus* nuncupatur.

*Fig. 8. §. 9. COROLLARIUM I. Sequitur ex hac geneſi, Radios omnes ejusdem Circuli aut æqualium Circulorum (v. g. C B, C D) eſſe æquales; cùm haberi poſſint pro ipſa linea Genitrice C A, alium tantùm ſitum obtinente: item æquari omnes ejusdem Circuli Diametros, utpote compoſitas ex 2 Radiis, in unam Rectam extenſis. Unde porro deducitur

§. 10. COROLLARIUM II. Diameter A B ſecat Circulum in duas partes æquales, ſeu Semicirculos. Nam concipe Semicirculum inferiorem X, factâ ſecundùm Diametrum A B complicatione, imponi ſuperiori; neuter excedet alterum; cùm ſit eadem utriusque longitudo A B, neque peripheria unius ullibi (v. g. in *o*) excedat peripheriam alterius, aliàs ejusdem Circuli Radii C D, C O exiſterent inæquales. E converſo ſi Recta A B dividat Peripheriam in arcus æquales B D A, & A *m* B; erit A B Diameter. Omnis enim alia, v. g. *r s*, pro Diametro aſſignata, duos arcus *r* D *s* & *r m s*, qui in hac hypotheſi inæquales ſunt, faceret æquales; id quod abſurdum.

§. 11. SCHOLION. *Placuit Majoribus, Peripheriam totam Circuli cujusvis, ſive magni ſive parvi, dividere in partes ſeu Gradus 360: hic enim numerus plures largitur aliquotas. Graduum quivis ſubdividitur in 60 Minuta prima; horum quodvis in 60 Minuta ſecunda; Minutum ſecundum in 60 Minuta tertia, & ſic porro. Notantur autem hæ partes ſignis iisdem, quibus Decempedæ partes notavimus in Arithm. C. 3. Art. 2., Gradus conſiderando ut Integra. Unde ſi Peripheriæ portio aliquâ exprimatur per* $182^{\circ}, 34', 6'', 59'''$; *lege: 182 Gradus, 34 Minuta, 6 Minuta ſecunda, 59 Minuta tertia. Quâ ratione Circuli aut Semicirculi Peripheria in ſuos Gradus diſtribuenda, docebitur Parte 2. Cap. 2.*

§. 12. DEFINITIO VII. *Angulus*

planus rectilineus, eſt duarum Rectarum in plano exiſtentium in uno Puncto (quod Anguli *Apex* vocatur) concurrentium ad ſe inclinatio. Tab. I.

SCHOLION. *Angulus ſæpe tribus litteris manifeſtatur, quarum media deſignat Punctum contactûs vel apicem Anguli.* Sic per CAB indicatur Trianguli X angulus A. Sæpe etiam indicabimus Angulum litterâ huic adſcriptâ, vel minuſculâ, Angulo inſcriptâ.* *Fig. 6.

§. 13. II. Angulorum *Menſura* eſt arcus ſeu portio Peripheriæ circularis, quæ intelligitur ex apice C* ceu centro ducta inter duo Anguli latera. *Sic menſura Anguli* ACO (Fig. 9.) *eſt arcus* Ar, *& Anguli* BCO *arcus* Br. Anguli itaque A & *a* (*Fig.* 11.) ſunt *æquales*, ſi habeant arcus, eodem Radio ductos, æquales. *Fig. 9.

§. 14. COROLLARIUM. Si poſitis æqualibus Angulis* A & *a*, unius apex A imponatur alterius apici *a*, & latus AB lateri *ab*; cadet etiam latus AC ſuper latus *ac*. Si enim aliter caderet, e. g. ut *ai*; hoc ipſo eſſent arcus, atque inde anguli inæquales, contra hypotheſin. *Fig. 11.

SCHOLION. *Angulus itaque minime augetur aut minuitur, etſi ejus latera augeas vel minuas. Nec enim a longitudine laterum, ſed a ſola horum divaricatione, aut arcuum amplitudine deſumitur angulorum magnitudo. Unde Angulus c, Figuræ 12, major eſt Angulo A vel a, Figuræ 11.*

§. 15. III. Recta CO dicitur *Perpendicularis* ad Rectam AO, ſi huic ita inſiſtat, ut angulus *m* oriatur æqualis contiguo *n*, vel ſaltem æqualis oriri poſſit, dum AO producitur verſus B. Angulus autem *m* vel *n*, a Perpendiculari conſtitutus, vocatur *Rectus*. Fig. 13.

§. 16. COROLLARIA. I. Anguli ambo, *m* & *n* a Perpendiculari formati habent pro menſura Peripheriam Semicirculi, nempe 180 gradus; quivis Angulorum Re- Fig. 13.

Tab. I. ctorum gradus 90, ſive Quadrantem Peripheriæ Circularis. II. * Si in Rectam AB incidat alia CO, quomodocunque inclinata; Anguli contigui *m* & *n* habent pro menſura arcum Semicircularem ſeu 180°; quare *m* & *n*, ſimul ſumpti, erunt vel duo Recti, vel 2 Rectis æquivalentes. III. * Quotcunque anguli fiant circa aliquod Rectæ *a b* punctum *c*; omnes ſimul ſumpti conficiunt 4 Rectos; nempe ſuperni duos, & inferni duos. IV. * Cognito Angulorum *m*, *n*, alterutro, cognoſcetur & alter: ſi nimirum cognitus (v. g. *n* = 32° 30′ 2″) ſubtrahatur ex 180° (i. e. hîc ex 179° 59′ 60″) Reſiduum enim (147° 29′ 58″) dabit angulum *m*.

* Fig. 9. * Fig. 12. * Fig. 9.

§. 17. IV. Angulus minor Recto (ùt *n* Fig. 9.) dicitur *Acutus*: major Recto (ùt *m*) *Obtuſus*.

SCHOLION PRACTICUM.

§. 18. *Quoſcunque Angulos formare, aut formatos metiri.* Geometra non careat Semicirculo (*Fig.* 10.) in ſuos Gradus, &, ſi fieri poſſit, ſaltem in ſemigradus diviſo, quem *Transportatorium* (Galli *Transporteur*) vulgo vocant; cujus interior area lineis vacua exſcinditur, relicto acuminato Centri puncto. Itaque I*mo* deſcripturus angulum quemcunque, e. g. 25 graduum, deſcribe primo latus unum A C, cujus extremitati uni C impone Transportatorii Centrum C, ejusdemque Radium C *a* ipſi A C: tum numera ex *a* in *b* 25 gradus, & gradum 25tum puncto nota; remoto Inſtrumento duc ex C latus C B ad dictum punctum. II. Menſurus Angulum datum A C B, impone Transportatorii Centrum apici C, & Semidiametrum C *a* lineæ datæ C A: tum ſi numeres gradus ex *a* in *b*, dabunt illi Anguli menſuram.

Cum Angulo Curvilineo, *qualis eſt X in Fig.* 24, *vel* Mixtilineo, *qualis eſt N B A in Fig.* 28, *nihil nobis negotii erit.*

Fig. 14. §. 19. DEFINITIO VIII. Lineæ Rectæ oppoſitæ (MN, PQ) dicuntur *Parallelæ*; ſi in eodem plano exiſtentes, æquali ubique intervallo diſtent.

Geneſis Parallelarum ita concipitur.* Perpendicularis M P moveatur ſub angulo ſemper Recto *a*, per lineam M N; deſcribet Punctum P Rectam P Q, æqualiter ubique diſtantem ab inferiore M N. *Ex qua Geneſi liquido conſequuntur iſthæc* Tab. I. * Fig. 15.

§. 20. COROLLARIA. I*mum.* Quoties inter Rectas oppoſitas Perpendicula M P, N Q ſunt æqualia; ipſæ oppoſitæ ſunt parallelæ. Tunc enim Recta P Q poteſt concipi ex motu alterutrius perpendiculi ita generata, ut ubique æqualiter diſtet ab oppoſita M N. II. Quotcunque Perpendiculares (v. g. F G, R S, N Q &c.) erigantur in una Parallelarum, erunt omnes erectæ æquales. Haberi enim ſingulæ poſſunt pro ipſa Genitrice M P. III. Perpendicula M P, F G intercipiunt ex Parallelis æquales partes P G, M F. Nam ſi Perpendicularis M P ſub angulo Recto ſemper eodem moveatur in F; movebitur punctum P æquabiliter cum puncto M, adeo ut ambo ſimul percurrant & deſcribant æquale ſpatium M F & P G. IV. Parallelæ rectæ in infinitum productæ nunquam concurrunt, propter Perpendicularem genitricem conſtanter eandem & æquale ubique intervallum efficientem.

§. 21. DEFINITIO IX. *Triangulum** eſt Superficies plana tribus lineis rectis terminata. Latus illud, cui concipitur Triangulum inſiſtere (v. g. A B) vocatur *Baſis:* reliqua latera Baſin complectentia (A C, C B) vocantur *Crura:* Crurum autem ſupernus apex C, dicitur Trianguli *Vertex*. * Fig. 21.

SCHOLION. *Quamvis pro lubitu poſſit quodvis Trianguli latus ſumi pro baſi, ſolet tamen Trianguli in charta deſcripti linea cum Horizonte coincidens, & inferior reſpectu Figuram intuentis, vocari Baſis; quod & a nobis, dum fieri poteſt, obſervabitur. Præterea dum Triangulum indicabimus per tres litteras, ſemper duabus primis notabimus*

Tab. I. *ejus baſin: id quod ad Demonſtrationum faciliorem intellectum faciet.*

§. 22. II. Ratione laterum, dicitur aliud

*Fig. 25. Triangulum *Iſoſceles* *, quod habet duo crura (CA, CB) æqualia. Aliud *æquilaterum* *,

*Fig. 24. quod habet tria latera æqualia. Unde omne Æquilaterum eſt Iſoſceles, ſed non contra.

§. 23. SCHOLION PRACTICUM. *Super datam*

*Fig. 24. * *AB Triangulum æquilaterum conſtruere.* Circini pede uno in A poſito, extende alterum in B, & hoc intervallo

E. I. 1. deſcribe ex punctis A & B circulos ſe ſecantes in C. Ad punctum interſectionis C duc lineas AC, CB; erunt utique tria latera, tanquam Radii vel ejusdem vel æqualium

* §. 9. circulorum inter ſe æqualia *. NOTA: Pro Praxi ſufficit ducere ſolos arcus *m* & *n*, ſeſe ſecantes. II. *Eadem*

Fig. 25. *ratione, data Baſi* a b *deſcribes Iſoſcelium,* ſi ductis ex *a* & *b* arcubus ſe in *c* ſecantibus, ducas ipſas *a c* & *b c*: hæ enim erunt pariter ùt Radii æqualium circulorum æquales.

§. 24. III. Ratione Angulorum dicitur aliud Triangulum *rectangulum*, (ùt A M O *Fig.* 7.) quod unum habet Angulum Rectum: & tunc latus AC Recto M oppoſitum appellatur *Hypotenuſa:* Reliquorum laterum unum ſi dicatur Baſis, vocabitur tertium *Cathetus.* Aliud *Obtuſangulum*, (ùt ABC *Fig.* 6.) quod habet angulum obtuſum; aliud *Acutangulum*, quod habet tres acutos, ùt *a b c. Fig.* 25.

§. 25. IV. Duo, pluráve Triangula dicuntur *mutuo æquilatera*, ſi habeant ſingula latera

*Fig. 21. ſingulis mutuo æqualia. Talia ſunt Z & X *, ſi ſit AB æquale ipſi *a b*, & BC ipſi *b c*, & CA ipſi *c a*.

§. 26. DEFINITIO X. Spatium pla-

num 4 lineis rectis terminatum dicitur *Quadrilaterum*. Hoc ſi habuerit 4. angulos Rectos, appellatur Quadrilaterum Rectangulum, vel brevitatis ergo, ſimpliciter *Rectangulum* nominatur. Rectangulum 4 æqualium laterum dicitur *Quadratum* *. Quadrilaterum habens 4 quidem latera æqualia, ſed non angulos rectos, *Rhombus* audit *. *Rhomboides* ** autem eſt Quadrilaterum obliquangulum habens bina quævis latera oppoſita æqualia, ſed ita, ut bina oppoſita ſint inæqualia aliis binis oppoſitis. Si in Quadrilatero quævis bina oppoſita latera fuerint parallela *, *Parallelogrammum* nuncupabitur. *Trapezium* autem voco Quadrilaterum *non* Parallelogrammum, aut habens latera bina oppoſita inæqualia. Tale eſt T. *Fig.* 18. Linea AC (Fig. 17. 30.) intra Quadrilaterum ducta ex angulo ad angulum oppoſitum, dicitur *Diagonalis*.

Tab. I. * Fig. 5. * Fig. 16. ** Fig. 17. * Fig. 3. 5. 16. 17.

SCHOLION. *Geometræ manifeſtant ſæpe Figuram Quadrilateram denominatione duarum tantum litterarum Diagonaliter oppoſitarum. Ad manifeſtandum Quadratum A B C D,* Fig. 5. *ſufficit indicare unum tantum ejus latus, vel per litteras A B, vel per* A B², *ſuperne litteris adjungendo Numerum 2; hic enim indicabit A B ad ſecundam Potentiam elevatam, h. e. in ratione Quadrati conſtitutum. De quo plura in Algebra.*

§. 27. DEFINITIO XI. Omne Triangulum ABC habet ſuam *Altitudinem*, quæ eſt linea Perpendicularis ex vertice ducta & cadens vel in ipſam baſin (ut in *Fig.* 7. in Triangulo ABC) vel in baſin productam, *Fig.* 6. Ita & Parallelogrammorum *Altitudo* eſt Per-

Tab. I. pendicularis ducta ex latere ſuperiore in Baſin, vel in Baſin productam. Fig. 16.

POSTULATA.

§. 28. Concedatur, poſſe ab uno puncto ad aliud lineam rectam duci; lineam datam in directum protendi ac continuari; bifariam, trifariam &c. ſecari; angulum item aliquem poſſe dividi in duos minores æquales; partem aliquam auferri a Toto, vel datæ Magnitudini adjici; dato centro & Radio circulum vel arcum deſcribi &c. Et quæ his gemina ſunt. Aut ſaltem concipiantur iſta fieri.

Signa Æqualitatis, Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Rationis, Proportionis, adoptata in Arithmetica, etiam hîc retinebimus.

AXIOMATA.

§. 29. I. Æqualia uni tertio (vel pluribus æqualibus) ſunt etiam æqualia inter ſe.

II. Si æqualibus æqualia addas, quæ inde proveniunt, ſunt æqualia.

III. Si ab æqualibus æqualia auferas, reſtant æqualia.

IV. Partes ſimul ſumptæ æquantur Toti.

V. Totum eſt majus ſua parte, & pars minor Toto.

VI. Quorum Tota ſunt æqualia, horum & dimidia ſunt æqualia. Et contra.

VII. Quæ ſibi mutuo congruunt, ſunt æqualia. *Dicuntur autem illa congruere, quæ ita ſibi poſſunt imponi, ut unum non excedat aliud.*

VIII. Omnes Lineæ rectæ æquales congruunt. Et contra.

IX. Omnes rectæ ab uno puncto A ad idem B ductæ ſunt æquales. Tab. I.

X. Linea recta eſt breviſſima omnium, quæ ab uno puncto ad aliud ducuntur. Aliæ enim omnes *non* rectæ, ſunt flexuoſæ, ſinuoſæ, per ambages ductæ: has autem rectis majores eſſe nemo neſcit.

XI. Omnes Anguli Recti ſunt æquales.

ARTICULUS II.

Proprietates primariæ Linearum, Triangulorum, & Parallelogrammorum.

PROPOSITIO I.

§. 30. *Si duæ rectæ* (AB, CD) *ſe ſecent*: E. I. 15.
Anguli ad verticem oppoſiti ſunt æquales, nimir. m *ipſi* n, & r *ipſi* s. Figura 19.

Demonstratur. Tum Anguli *n* + *s*, tum *s* + *m* valent duos Rectos*. Ablato ergo angulo communi *s*, manent *m* & *n* æquales*. *Q. e. d.* Eodem modo probatur, eſſe *r* = *s*. *§. 16. Cor. 1. *Ax. 3.

SCHOLION. Si in rectæ AB punctum O incidant duæ DO, CO ita, ut anguli oppoſiti COA, BOD ſint æquales; hæ (DO, CO) facient unam rectam. Si enim non: faciat *r*O cum OD unam rectam; igitur angulus *r*OA æqualis foret ipſi BOD*, adeoque & ipſi COA, i. e. pars Toti. Quod eſt abſurdum. Ergo. Fig. 20. E. I. 14. *Pr. 1.

Uſus hujus Propoſitionis creberrimus erit in ſequentibus. Uſus.

PROPOSITIO II. E. I. 4.

§. 31. *Si Triangula* X & Z *habeant angulum unum alteri æqualem* (v. g. A = a) & *latera, quæ hos angulos comprehendunt, mutuo æqualia* (nempe AC = ac, & AB = ab): *erunt tota Triangula æqualia.* Fig. 21.

Demonstratio. Si concipias unum Tri-

Tab. I. angulorum (v. g. X) imponi alteri Z; propter æqualitatem angulorum A & *a*, incumbent la-
* §. 14. tera *ab*, *ac*, lateribus AB, AC*. Et cùm latera impoſita ponantur eſſe ſubjectis æqualia, cadent puncta *b* & *c* ſuper puncta B & C, adeoque & latera *b c* & BC congruunt. Quare cùm Tota nunc Triangula X & Z congruant,
* Ax. 7. erunt hæc æqualia *. *Q. e. d.*

SCHOLION. *I. Latera & angulos, in hujusm. impoſitione ſibi reſpondentia, vocabimus deinceps* congrua. *II. Quanquam indicata Triangulorum X & Z impoſitio non ſit mechanica, ſed mente concipiatur; author tamen ſum Tironi, ut mechanica Triangulorum chartaceorum impoſitione expendat Demonſtrationem Propoſitionis hujus, & 3. 5. 7. 9næ. Sic enim & vim imaginativam magnopere juvabit, & qui anguli aut quæ latera congruant, facilius diſpiciet.*

Uſus. *Hæc Propoſitio frequenter adhibebitur ad plurium aliarum demonſtrationem, e.g. Propoſ. 4. 11. 15. &c.*

E. I. 26. PROPOSITIO III.

Fig. 25. §. 32. *Si unius Trianguli* X *latus unum* (AB) *fuerit æquale alterius Trianguli* Z *lateri* (a b), & *anguli adjacentes fuerint mutuo æquales* (nempe A = a, B = b): *Tota Triangula ſunt æqualia.*

DEMONSTR. Impone latus *a b* lateri A B;
* Ax. 8. & congruent *. Propter æqualitatem vero angulorum cadet latus *a c* ſuper latus A C, &
* §. 14. *b c* ſuper B C *; demum punctum *c* in punctum C (*ſi enim* c *caderet extra* C, *v.g. in* n, *latera* a c & b c *jam non caderent ſupra latera A C, B C, contra ac demonſtratum fuit*). Ergo rur-
* Ax. 7. ſus congruunt & æquantur * X & Z. *Q. e. d.*

E. I. 5. PROPOSITIO IV.

Fig. 7. §. 33. *In Triangulo Iſoſcele A B C anguli* (A & B) *ad baſin ſunt æquales.*

DEMONSTR. Concipe, ex vertice C in Baſin duci lineam talem CM, quæ dividat angulum C in duos æquales *o*, *i* *. Jam quia in Triangulis X & Z latera angulos *o* & *i* comprehendentia ſunt mutuo æqualia (*Nam* AC = CB *; *& latus* CM, *quod eſt utrique Triangulo commune, ſubit vicem duorum laterum æqualium*); æquantur Triangula X & Z *; &, ſi hæc ſibi imponantur, anguli congrui A & B. *Q. e. d.* Tab. I. * §. 28. * §. 22. * Pr. 2.

COROLLARIUM. In Iſoſcele linea CM biſecans angulum C, *primo* biſecat Baſin; *2do*, eſt ad hanc Baſin Perpendicularis; quippe Anguli congrui ad M ſunt æquales & Recti; hinc CM Perpendicularis *. * §. 15.

PROPOSITIO V.

E. I. 8. Fig. 21.

§. 34. *In Triangulis mutuo æquilateris* (X & Z) *anguli æqualibus lateribus oppoſiti ſunt æquales; ipſaque Triangula inter ſe æqualia.* Sit AB = *ab*; AC = *ac*; BC = *bc*; æquabuntur & anguli A, *a*, æqualibus lateribus CB, *cb* oppoſiti: erit item B = *b*; C = *c*.

DEMONSTRATIO. * Conjungantur hæc duo Triangula ad latera æqualia CA, *ca*. Jam vero lineæ BA, *ba* vel facient unam rectam vel non? Si non faciunt; ducatur recta B*b*: exurgent duo Iſoſcelia B*bc*, B*b*A, in quibus æquantur anguli *r* & *s*, *o* & *i* *. Unde ſi ipſis *r* & *s* addas æquales *o* & *i*, erunt anguli CBA & *cba* æquales *, atque ob latera circa hos angulos æqualia, æquabuntur Triangula X & Z *, horumque congrui anguli A, *a*; B, *b*; C, *c*. * Fig. 22. * Pr. 4. * Ax. 2. * Pr. 3.

Tab. I. Si B A, *b a* faciunt unam rectam B *b*; erunt Iſoſcelii B *b c* anguli ad Baſin æquales, ac rurſus ob latera circa hos æqualia æquabuntur tota X & Z, & anguli congrui A, *a*; B, *b*; C, *c*. Ergo. *Q. e. d.*

Si quando latera B A, b a *intrò vergant, ut in Fig.* 23. *eadem redit Demonſtratio, niſi quòd anguli* o *&* i *nunc ſint ſubtrahendi ex totis C B b, C b B.*

*Fig. 21. §. 35. Corollarium I. Practicum. * *Triangulo dato Z conſtituere aliud æquale X.* Ductâ *a b*, æquali ipſi A B, cape circino intervallum lateris A C, & iſthoc duces ex *a* arcum, dein intervallo B C ex *b* alium arcum, qui priorem ſecet: demum ex puncto interſectionis *c* duc latera *c a*, *c b*. Erit factum. Nam Triangula X & Z ſunt mutuo æquilatera, ergo æqualia.

E. I. 23. §. 36. Eodem hoc artificio, conſtitues Angulo A æqualem angulum *a*, ſi facias Triangulum *a b c* ⌶ A B C: quia tunc A & *a* opponuntur æqualibus lateribus. *Vel* (*Fig.* 11.) Ductâ *a b*, deſcribe eâdem Circini aperturâ ex centris A & *a* arcus B R, *b r*; deinde intervallum B R transfer ex puncto *b* in *r*, ad quod ſi duxeris ex *a* rectam *a c*, orietur *a* ⌶ A. Nam B A R, *b a r* ſunt Triangula mutuo æquilatera. Ergo.

* Fig. 26. E. I. 9. §. 37. Corollarium II. Practicum. * *Angulum A C B biſariam ſecare.* Abſcinde circino ex Anguli lateribus æquales partes C A, C B; & ex punctis A & B duc eodem Radio arcus ſe ſecantes in D. Recta C D ſecabit Angulum C in duos, *o* & *i*, æquales. Quia in Triangulis mutuo æquilateris C D A, C D B, *o* & *i* opponuntur æqualibus lateribus A D, B D.

*Fig. 27. E. I. 10. §. 38. Corollarium III. Practicum. * *Lineam A B biſariam ſecare.* Ex A & B, ceu centris, duc eâdem aperturâ circini arcus ſe ſecantes hinc in C, illinc in D. Recta C D biſecabit in *m* datam A B. Nam in △△ æquilateris C D A, C D B anguli *o* & *i* ſunt æquales: ergo in Iſoſcelio A B C ipſa C D biſecat baſin *.

* Pr. 4. Cor.

§. 39. COROLLARIUM IV. Practicum. *Lineam Perpendicularem ducere.* Et I^mo quidem, *ſi in dato lineæ AB* punćto quodam intermedio m ſit erigenda Perpendicularis* m C. Uno Circini pede in *m* fixo, altero abſcinde utrinque æquales partes *m* A, *m* B: tum deſcribe ex A & B, æquali circini intervallo, arcus ſe ſecantes in C: Ducta demum C D erit Perpendicularis. Nam in Δ Δ mutuo æquilateris A *m* C, B *m* C, eſt *o* ≚ *i*: ergo intra Iſoſceles ABC eſt C*m* Perpendicularis *. II. * *Si ex dato aliquo punćto ſuperno C demittenda ſit Perpendicularis in ſubjectam lineam.* Duc ex C arcum, qui rectam ſecet in duobus punćtis A & B, ex quibus ceu centris deſcribe eâdem circini apertura circulos ſe ſecantes in D. Rectæ CD pars C *m* eſt Perpendicularis. Nam in æquilateris C D A, C D B æquantur *o* & *i*, ergo in Iſoſcelio A B C eſt C *m* Perpendicularis, *per Pr. 4. Cor. 2.* — Tab. I. E. I. 11. Fig. 27. * Pr. 4. Cor. 2. * Fig. 22. E. I. 12.

§. 40. SCHOLION. * *Si Perpendicularis ſit erigenda in linea A B punćto extremo A.* Fige unum circini pedem in arbitrario punćto *o*, alter extendatur in A, ac circumdućtus ſecet alicubi lineam AB. Ex punćto ſećtionis B duc per *o* lineam BC, & ad C ipſam AC, quæ erit Perpendicularis, ut patebit *ex Propoſit. 20. Coroll. 1*, eo quod in Semicirculo B C A angulus A ſit Rectus. — * Fig. 28.

Hæ omnes operationes celerrime expediuntur mechanicâ *Normæ* vel *Gnomonis* (Winckelhacken) applicatione. Vide Fig. 28.

Diſcis præterea ex Corollarii IV. Praxi 2. quomodo deſcribenda Crux orthogona (CD, AB), quæ videlicet angulos ad *m* Rectos habeat. *Fig. 27.*

PROPOSITIO VI. — E. I. 27.

§. 41. *Si Linea obliqua* AB *ſecet in* C & A *duas Parallelas* M N, P Q; *æquales erunt tum anguli interni oppoſiti* r, s, *qui &* alterni *vocantur; tum anguli* t & s, *ex una ſecantis parte poſiti, quorum primus vocatur externus, alter internus.* II. *Et ſi ſecans* B A *faciat æquales alternos* r, s, *vel dićtos* t, s: *Lineæ* M N, P Q *ſunt Parallelæ.* — Fig. 29. E. I. 28. 29.

DEMONSTRATUR I. PARS. — * Fig. 30.

Concipe erigi in A* Perpendicularem AD,

Tab. I. & hanc ſub angulo Recto moveri uſque in B C. Quoniam igitur æquantur tam Perpendicula
* Defin. 8. Cor. A D, B C, quam lineæ A B, D C*; mutuo æquilatera ſunt △△ A D C & C B A; atque in his anguli *r* & *s*, æqualibus lateribus oppoſiti,
* Prop. 5. æquales*. *Quod erat primum.* Præterea (*Fig.*
* Pr. I. 29.) cùm ſit nunc $s = r$; & $r = t$*, etiam eſt $s = t$. *Quod erat alterum.*

* Fig. 30. §. 42. COROLLARIUM. Recta A D*, Perpendicularis ad Parallelarum unam A B, eſt etiam Perpendicularis ad oppoſitam D C, eoquod angulus D ſit Rectus: nam, *ex demonſtratis*, D æquatur congruo B: ſed B eſt Rectus, ergo & D; proinde D A Perpendi-
* §. 15. cularis*.

* Fig. 29. SCHOLION. *Etiam æquales ſunt anguli *n*, *m*. Etenim tam $n + r$, quam $s + m$ æquantur 2 Rectis. A quibus ſi auferas
* Pr. I. æquales *r* & *s*, reſtant æquales *n*, *m*. II. Cùm ſit $n = C$*, erit etiam $C = m$. III. Anguli interni $r + m$ vel $n + s$, ſemper æquantur 2 Rectis. Nam $r + n = 180$ grad.; ſed $n = m$: ergo $r + m = 180$ grad.

DEMONSTRATUR II. PARS:

Si neges, P Q eſſe parallelam ad M N; du-
* Fig. 31. catur * alia *l* C, cum M N parallela: igitur eſt angulus l C A $= s$: ſed & $s =$ P C A*. Ergo
* ex hypoth. æqualis eſt *l* C A ipſi P C A, i. e. pars Toti. Quod quia abſurdum eſt, relinquitur, M N,
* Fig. 29. P Q eſſe parallelas. *Q. e. d.* Idem rectarum* M N, P Q paralleliſmus evincitur, ſi ponas
* Pr. I. $t = s$. Cùm enim tunc ſit $t = r$*, adeoque & $r = s$; prior redit Demonſtratio.

§. 43. COROLLARIUM I. Omnia Quadrata, Rectangula, Rhombi & Rhomboides ſunt Paral-

Parallelogramma. (Fig. 30.) Ductâ enim Diagonali C A, dividetur Quadrilaterum in duo Triangula mutuo æquilatera: in quibus cùm anguli alterni *r*, *ſ*; item D A C, B C A, æquales ſint *; ſequitur, latera quævis oppoſita parallela eſſe. Tab. I: * Pr. 5:

§. 44. COROLLARIUM II. Fig. 33. Lineæ P Q, X Z, Parallelæ ad tertiam M N, ſunt etiam Parallelæ inter ſe. Nam ſtante hypotheſi, anguli *t* & *n*, æquales ipſi *s* *, æquantur inter ſe. Ergo P Q, X Z (imo quotcunque aliæ, parallelæ cùm M N) ſunt parallelæ inter ſe. E. I. 30. * Part. I.

COROLLARIUM III. Practicum. Fig. 29. *Datâ Rectâ* M N, *aliam ipſi parallelam* P Q *ducere.* Ex datæ M N puncto arbitrario A ducatur A B. Fiat angulo *s* æqualis ipſe *r*: ducta P Q, angulum iſtum *r* formatis, erit cùm M N parallela: E. I. 31.

ALITER. * Eâdem Circini aperturâ duc ex Lineæ A B punctis *m*; *n*, arbitrario electis, arcus *r*, *s*; deinde lineam C D, quæ dictos arcus tangat: erit hæc ad A B parallela. Nam in Propoſ. 19. oſtendetur, rectas *m r*, *n s*, ad punctum contactûs ductas, eſſe Perpendiculares: quæ cùm æquales ſint *, faciunt ipſas A B, C D parallelas, *per Def*. 8 *Coroll*. I. * Fig. 32. * *Def.* 6. *Cor.* I.

Hæc Propoſitio uberrimus fons eſt aliarum veritatum Geometricarum, ſcitu perquam neceſſariarum, ut mox patebit §§. 45. 46. 49. &c. Uſus:

PROPOSITIO VII.

§. 45. *Cujusvis Trianguli* A B C (Fig. 34) *tres interni anguli ſimul ſumpti ſunt æquales duobus Rectis. Vel:* $A + B + c = 180^{\circ}$: E. I. 32.

DEMONSTR. Producto uno latere, v. g. A C in E, duc C D parallelam cùm A B. Jam

Tab.I. anguli *a* † *b* † *c* æquantur 2 Rectis *. Sed *c*
* §. 16. Cor. 3. exiſtit intra ipſum Triangulum; *a* æquatur interno A, & *b* alterno B *. Ergo & A † B † *c*
* Pr. 9. æquantur 2. Rectis. *Q. e. d.*

CorollariA.

Fig. 21. §. 46. I. Si in duobus △△ X, Z, æquales ſint duo anguli A & B duobus *a*, *b*, ſinguli ſingulis; etiam tertius C tertio *c* æqualis erit.

Fig. 21. II. Noto uno Trianguli X angulo *c* (v. g. 42° 3′ 50″) cognoſcetur Summa reliquorum *a*, *b*. Et cognitâ Summâ duorum *a*, *b*, conſtabit & reliquus *c*. Nam ſubtrahe ipſum *c*
* Arithm. §. 41. n. 2. ex 180°. (i. e. hîc ex 179° 59′ 60″ *) reſiduum (137° 56′ 10″) dabit ipſos *a* † *b*. Hanc vero ipſam Summam ſi ſubtrahas ex 180°, reſiduum dabit angulum *c*.

* Fig. 25. III. In Iſoſcele Z *, ſi angulus unus ad baſin v. g. *a* cognitus ſit; cognoſcetur & alter
* Pr. 4. *b* *, & ex horum Summa, à 180° ſubtracta, verticalis *c*. Cognito autem verticali *c*, & ex 180° ſubtracto, manifeſtabitur Summa angulorum ad Baſin; quæ biſariam diviſa dabit ſingillatim ipſos *a* & *b*.

* Fig. 6. IV. * Si in Triangulo X Angulus B ſit Rectus vel obtuſus, erunt reliqui acuti: ſimul autem ſumpti & ipſi Rectum efficiunt, ſi B Rectus fuerit. *In Hujusce Propoſitionis da'a mox Demonſtratione continetur alia magni momenti veritas, nempe:*

* Fig. 34. V. Dum producitur Trianguli * latus quodpiam v. g. A C, oritur angulus E C B, qui vocatur *externus:* atque hic æqualis eſt duo-

bus internis oppoſitis, A & B ſimul ſumptis. Tab. I.
Nam ductâ, ut ante, Parallelâ C D, componitur ille externus ex *a* & *b*. Atqui * *a* = A, * *ex demonſtr.*
b = B. Ergo. Hinc porro ſequitur:

VI. Angulus externus E C B major eſt E. I. 16.
quam vel Angulus A, vel B.

VII. Si A B C ſit Iſoſceles; erit verticalis Fig. 34.
externus E C B duplus anguli ad Baſin, A vel B.

Hujus Propoſitionis immenſus prope uſus eſt per reliquam Matheſin. Uſus.

PROPOSITIO VIII.

§. 47. *In omni Triangulo latus majus opponitur majori angulo: II. Et contra.* Sit in E. I. 18. 19.
Δ A B C latus C B majus latere C A; dico, Tab. II.
Angulum A majori lateri oppoſitum eſſe ma- Fig. 35.
jorem Angulo B, qui minori lateri opponitur. Viciſſim ſi ſit A major quam B; erit etiam C B majus latere C A.

Demonstr. I. Pars. Abſcinde in majore latere lineam C D, æqualem ipſi C A: Ductâ A D, erunt Iſoſcelis A D C anguli *o* & *i* æquales. Sed *i* tanquam externus eſt major interno B*; Ergo & *o*, multo magis totus *Pr. 7. Cor. 6.
angulus A eſt major angulo B. *Q. e. d.*

Demonstr. II. Pars. Si negas; erit C B vel æquale lateri C A, vel minus illo: ſi primum; anguli A & B ſunt æquales*, contra *Pr. 4.
ſuppoſitum. Si 2dum; majus C A opponeretur minori angulo B, contra Partem I. Ergo.

§. 48. Corollarium. * Perpendicularis C B eſt breviſſima omnium, quæ duci *Fig. 41.

Tab.II. poſſunt ex Puncto C in Rectam A B. Nam ducatur quævis alia C s: erit angulus B Re-
* Pr. 7. Cor. 4. ctus, s acutus *; Ergo latus C s majus quam C B. II. Ex Puncto C nonniſi unica Perpendicularis duci poteſt ad lineæ A B punctum B.

Uſus §§. 64. 81. Hinc intelligitur, cur Perpendicularem, utpote unicam breviſſimam, Geometræ aſſumpſerint pro Menſura Parallelarum, pro Altitudine Triangulorum & Parallelogrammorum.

E. I. 34. PROPOSITIO IX.

§. 49. *Omne Parallelogrammum dividitur*
Fig. 36. *per Diagonalem* A C *in duo Triangula æqualia: Habetque latera oppoſita æqualia, nempe* A D = B C, A B = D C.

DEMONSTR. Triangula A C B, A C D, habent latus A C commune, & angulos huic adjacentes æquales, nempe *r* = *s*, & *m* =
* Pr. 6. p. 1. *n* *. Ergo tota ſunt æqualia, *per Prop.* 3. horumque latera congrua A D, B C; A B, D C. *Q. e. d.*

Uſus in Prop. 10. 12. &c. §. 50. COROLLARIA. I. Alterutrum Triangulorum eſt dimidium Totius Parallelogrammi. II. Parallelæ (A D, B C) inter Parallelas (A B, D C) deſcriptæ, ſunt æquales. III. In Parallelogrammo æquantur anguli oppoſiti B, D; item *r* + *m*, *s* + *n*.

PROPOSITIO X.

§. 51. *Si Trianguli* a b c *crus unum*, a c,
Fig. 37. *dividatur in partes æquales* (a p, p q, q r, r c) *& ex punctis* p, q, r, *ducantur lineæ cum Baſi parallelæ; hæ ſecabunt & alterum ejus* c b *in totidem partes æquales*, b m, m n, n x, x c.

DEMONSTR. Ducantur *m i*, *n i*, *x i*, parallelæ cum *c a*; orientur Triangula *b i m*, *m i n*, *n i x*, *x r o*, eaque æqualia inter ſe, per Propos. 3. (*Nam æquantur inter ſe latera* m i, n i, x i, c r, *utpote æqualia æqualibus* a p, p q * &c. *ob eorundem vero laterum parallelismum ad* c a, *æquales ſunt omnes anguli* o*, *item omnes* i, *utpote æquales æqualibus* ** u, p, q, r), Ergo & æquantur horum latera congrua *b m*, *m n* &c. *Q. e. d.* Tab. II. *Pr. 9. & Ax. 1. *Pr. 6. p. 1. **Pr. 6.

Huic Propoſitioni innititur totus Articulus I. C. 2. Uſus.

PROPOSITIO XI. E. I. 35.

§. 52. *Parallelogramma* (A B C D, A B M N) *conſtituta intra easdem Plani Parallelas* (A B, D M) *ſuper eandem Baſin* (A B), *ſunt æqualia.* Fig. 38.

DEMONSTR. Conſidera duo Triangula D A N, C B M, æqualia per Propos. 2. (*Nam æquantur anguli* s & s, *utpote æquales externo* t*, *item latera* AD, BC; AN, BM*)* Jam ſi ab utroque Triangulo auferas partem communem C O N, & utrique addas aliam communem A B O; reſultant inde Parallelogramma B D, A M, eaque æqualia*. *Q. e. d.* * Pr. 6. p. 1. * Pr. 9. * Ax. 3. & 2.

SCHOLION. Si Parallelogramma ſe habuerint, ut in Fig. 39. eodem modo demonſtratur æqualitas Triangulorum x & z, ſufficitque his ſolum addidiſſe partem communem R.

§. 53. COROLLARIUM I. Etiam Parallelogramma B D, A M, æqualis Baſeos & Altitudinis ſunt æqualia, etiamſi primum non inſiſtat Baſi ſecundi. Nam poteſt concipi, E. I. 36.

Tab. II. baſin primi transferri ſuper Baſin ſecundi; & prior Demonſtratio valebit, cùm propter æqualia altitudinum Perpendicula tunc inter eaſdem Parallelas verſentur, per Def. 8. Cor. 1.

§. 54. COROLLARIUM II. Practicum. *Parallelogrammum obliquangulum A B M N convertere in aliud Rectangulum priori æquale.* Produc Parallelam M N in D; erige Perpendicularem A D & B C; exurget B D ⊟ A M.

SCHOLION. *Obſervatu dignum eſt, poſſe dari Figuras* B D, A M *quoad areas quidem æquales, quoad Perimetrum autem maxime inæquales.*

Uſus. *Ex hac & duabus ſeqq. Propos. docemur, Planorum omnium areas metiri, quæ res in Geometria Practica ſummæ utilitatis.*

E. I. 37. 38. PROPOSITIO XII.

§. 55. *Etiam duo Triangula* ABC, ABN, *conſtituta ſuper eadem Baſi & intra eaſdem Parallelas, ſunt æqualia.* Fig. 40.

DEMONSTR. Ducantur B D, B M, Parallelæ cum A C, A N: exurgent æqualia Parallelogramma A D, A M *. Sed horum dimidia ſunt Triangula A B C, A B N *. Ergo & hæc ſunt æqualia * *. *Q. e. d. Æqualia item ſunt Triangula diſtinctarum quidem, ſed tamen æqualium baſium, modo eandem habuerint altitudinem. Probatur ut Coroll.* §. 53.

* Prop. 11. * Pr. 9. Cor. 1. ** Ax. 6.

§. 56. COROLLARIUM I. Practicum. *Triangulum non rectangulum* A B N *mutare in rectangulum æquale.* Intra parallelas A B, C M, duo perpendicularem A C, & rectam C B. Erit A B C rectangulum ⊟ A B N.

§. 57. COROLLARIUM II. Practicum. *Triangulum* A B C * *divides in alia duo æqualia* A M C, M B C; ſi ad baſin, in M biſectam, ducas ipſam C M. Porro ſi Baſin ſeces in tres, quatuor, pluresve partes æqua-

* Fig. 41.

les, & ad puncta ſectionum ducas ex vertice C rectas; Tab.II.
dividetur A B C in totidem Triangula æqualia, quot
ſunt partes in Baſi.

PROPOSITIO XIII. E. I. 41.

§. 58. *Si Triangulum A B C, inſiſtens Baſi Parallelogrammi A B M N, ſit intra easdem Parallelas cum illo: erit A B C dimidium hujus Parallelogrammi A M.* Fig. 43.

DEMONSTR. Ductâ Diagonali N B, eſt ABN dimidium ipſius AM *. Sed ABN = ABC *. Ergo & A B C eſt dimidium ipſius AM. *Q. e. d.* * Pr. 9. Cor. 1. * Pr. 12.

PROPOSITIO XIV. E. I. 43.

§. 59. *Si in Parallelogrammo A B C D, ductâ Diagonali A C, ducantur duæ* a b, n m, *parallelæ cum lateribus A B, A D, quæ ſe ſecent in aliquo Diagonalis puncto* o; *Parallelogramma* X *&* Z, *quæ a Diagonali non ſecantur, ſunt æqualia.* Fig. 44.

DEMONSTR. Triangula A C D, A C B ſunt æqualia: ex quibus ſi auferas æquales * partes P & Q, *r* & *s*; reſtant X & Z æqualia. * Pr. 9.

PROPOSITIO XV. E. I. 47.

§. 60. *Si ſuper Trianguli rectanguli A B C ſingula latera excitentur Quadrata: erit B M, Quadratum Hypotenuſæ, æquale reliquorum laterum Quadratis N A & R, ſimul ſumptis.* Fig. 42.

DEMONSTR. Ducantur N B, M A; deinde A P Parallela cum C M. Jam vero Triangula M C A & B C N ſunt æqualia, per Propos. 2. (*Nam* M C = B C, *&* C A = N C *; * Def. 10.

Tab.II. *& angulus interceptus* a † i *æquatur intercepto alteri* i † o; *ambo quippe componuntur ex Recto & communi* i). Sed Triangulum MCA eſt dimidium Parallelogrammi CP, &
* Pr.13. NCB eſt dimidium Quadrati NA*. Ergo
* Ax.6. horum tota, ſcil. CP, NA ſunt æqualia *. Eodem modo oſtendo, Rectangulum S æquari Quadrato R, ſi ducantur prius rectæ LC, HA. Ergo CP † S, i. e. Quadratum Hypotenuſæ æquatur Quadratis NA, R, ſimul ſumptis. *Q. e. d.*

§. 61. COROLLARIUM I. Practicum. *Notis duobus quibuscunque Trianguli rectanguli lateribus, v. g.* Fig.42. BC 5, *&* BA 3 *pedum, invenire tertium AC.* Ex Radicis BC Quadrato (25) ſubtrahe Radicis BA Quadratum (9); reſiduum 16 dabit Quadratum CN: Hujus Radix (invenienda per Arithm. C. 4) quæ eſt 4, eſt ipſa linea AC 4 pedum. Ut ex notis BA, AC erues Hypotenuſam BC, collige Quadrata linearum BA, AC in unam ſummam (æqualem Quadrato CH), extracta inde Radix præbet latus BC.

Fig.45. §. 62. COROLLARIUM II. Practicum. *Datis pluribus Quadratis, v. g. laterum* a b, b c, c d, *unum omnibus æquale conſtituere.* Junge ad angulum Rectum latera *a b*, *b c*, & duc Hypotenuſam *a c*: huic ad angulum Rectum pariter junge latus *c d*, & duc alteram Hypotenuſam *a d*; atque ita porro, ſi plura Quadrata ſuperfuerint. Continebit denique Quadratum, ſuper *a d* exſtruendum, Quadrata omnium datorum laterum.

Uſus. *Hæc Propoſitio vocatur Theorema Pythagoricum, ab inventore Pythagora, qui fertur Muſis propterea* 100 *boves immolaſſe. Ejus uſus latiſſime diffunditur per univerſam Geometriam. Hâc ſi deſtitueremur, Trigonometriam nullam haberemus.*

ARTICULUS. III. Tab. II.

Circuli primariæ affectiones.

DEFINITIONES.

§. 63. I. *Circuli concentrici* ſunt, qui ducti ſunt ex eodem centro.

II. *Chorda* eſt Recta, quæ intra Circulum utrimque ad peripheriam terminatur.

Talis eſt *a b*, Fig. 46. Omnis chorda ſubtenditur arcui; Chorda *a b* arcui *a n b*, imo & arcui *a m b*.

III. Recta *t n* dicitur *Tangens*, ſi ducta a puncto *t*, extra circulum aſſumpto, ita occurrat circulo in *n*, ut producta verſus g Circulum non ſecet. Fig. 46.

IV. *Segmentum Circuli* eſt portio Circuli, contenta intra chordam & hujus arcum. Tale eſt Spatium *a b n*.

V. *Sector Circuli* (CXZ Fig. 46.) eſt pars Circuli terminata a duobus Radiis, & arcu intercepto.

VI. Angulus A (Fig. 53.) ad Peripheriam, dicitur inſiſtere arcui alicui BDC, cùm ejus apex tangit Peripheriam, latera autem angulum formantia, intercipiunt dictum arcum BDC.

VII. *Polygonum* eſt Figura plana, pluribus quam 4 lineis rectis terminata. Dividitur in *Irregulare*, quod habet latera inæqualia; & in *Regulare* *, quod habet & latera omnia æqualia, & angulos (*a*) a Polygoni lateribus formatos æquales. Regularium aliud dicitur Circulo *Inſcriptum*, ſi ejus latera ſint * Fig. 47.

Tab.II. Circuli chordæ. Aliud *circumſcriptum*, cujus latera tangunt circulum; *quale eſt in Tab. V. Fig.* 123. Si ex Polygoni inſcripti angulis *a* ducantur rectæ ad centrum *o*; quilibet angulorum ad *o*, vocatur *Angulus ad centrum*.

SCHOL. *Polygonum a lateribus 5, dicitur Pentagonum; a 6, Hexagonum; a 7, Heptagonum &c.*

E. III. 26. 27. PROPOSITIO XVI.

Fig. 48. §. 64. *Si in Circulo chordæ* a b, r s *ſunt æquales: etiam arcus, quibus ſubtenduntur, ſunt æquales. II. Viciſſim, arcubus æqualibus ſubtenduntur chordæ æquales.*

DEMONSTRATUR I. *Pars.* Ductis Radiis *a c*, *b c*; *s c*, *r c*, exurgunt Triangula *a b c*, *r s c*, mutuo æquilatera (Nam *a b* = *r s* *; reliqua latera ſunt Radii ejusdem Circuli) Ergo & æquantur anguli ad *c* *, & horum menſuræ, nempe arcus *a n b*, *r m s*. * *Q. e. d.*

* hypoth. * Pr. 5. * §. 13.

DEMONSTR. II. *Pars.* Ductis, ut ante, Radiis, æquantur anguli ad *c*, ob arcus ſuos ex hypoth. æquales. Æquantur igitur Iſoſcelia *a b c*, *r s c* *, horumque baſes, i. e. Chordæ *a b*, *r s*. *Q. e. d.*

* Pr. 2.

E. III. 3. PROPOSITIO XVII.

Fig. 60. §. 65. *Perpendicularis,* n c, *ducta ex centro ad chordam* a b, *biſecat & hanc, &, ſi producatur, arcum. II. Et Recta* c n *ex centro ducta, chordamque biſecans, eſt Perpendicularis.*

E. III. 14. III. *Si chordæ* a b, r s, (Fig. 48.) *ſint æquales, etiam Perpendiculares* c m, c n *ſunt æquales.*

DEMONSTRATUR I. *Pars.* In Triangulis X, R æquantur anguli *a*, *b*, (Nam *a b c* eſt Iſoſceles) item Recti ad *n*, igitur & reliqui ad *c* *. Proinde X & R ſunt æqualia *, atque in his latera congrua *an*, *nb*. *Quod erat unum.* Ob angulos autem ad *c* æquales *, æquantur & ipſi arcus *a o*, *o b*, *Quod erat alterum.* Tab. II. * Pr. 7. Cor. 1. * Pr. 2. * ex demonſtr.

DEMONSTR. II. *Pars.* Triangula X & R ſunt mutuo æquilatera; ergo anguli ad *n* æquales; proin *c n* Perpendicularis *. *Q. e. d.* * §. 15.

DEMONSTR. III. *Pars.* Fig. 48. Iſoſcelia *a b c*, *r s c* ſunt æqualia, & horum baſes biſectæ in *m* & *n* *. Unde ſi *r s c* imponatur æquali *a b c*, punctum *m* cadet in aliud medium *n*; adeoque ipſæ *c m* & *c n* congruunt & ſunt æquales. *Q. e. d.* * per Part. I.

SCHOLION. Ex eadem impoſitione deducitur, æquari tum ſectores ejusdem circuli *c r s*, *c a b*, æquali arcu terminatos; tum ſegmenta ab æqualibus chordis facta, ut patet, ſi ab æqualibus his ſectoribus auferas æqualia Iſoſcelia. II. Ex Parte I. docemur arcum *a b* biſecare: conſule Fig. 60. Fig. 48. Uſus, E. III. 30.

PROPOSITIO XVIII.

§. 66. *Si per Chordæ biſectæ* (A B) *punctum medium* O *tranſeat Perpendicularis* (D E) *ad Peripheriam utrimque terminata: erit in hujus* D E *puncto medio* C *Circuli centrum.* Fig. 51.

DEMONSTR. Anguli ad O ſunt Recti, atque hinc Triangula A O E, B O E æqualia *, horumque congrua latera ſeu chordæ, A E, B E, iſtarumque arcus *. Pari ratione æquantur A O D, B O D, horumque latera ſeu chordæ, A D, B D, iſtarumque arcus. Ergo arcus E A † A D eſt æqualis arcui E B † * Pr. 2. * Pr. 16. p. 1.

Tab.II. BD, proinde ED Diameter *, & c Centrum.
* §. 10. *Q. e. d.*

§. 67. COROLLARIUM I. Si in Circulo recta D E aliam A B bifariam & perpendiculariter ſecet: erit in ſecante centrum.

E. III. 1. Fig. 52. * Cor. prac. E. III. 25.

§. 68. COROLLARIUM II. Practicum, *Centrum Circuli vel arcûs invenire*. Duc duas Chordas A B, B D, & per harum puncta media *m*, *n*, perpendiculares: punctum interſectionis C erit centrum. Cum enim ambæ Perpendiculares debeant tranſire per centrum *, quod eſt unicum punctum; id vero nullibi faciant niſi in C; hoc Centrum erit. II. Ex hiſce diſcis etiam arcum A B D perficere, & peripheriam complere.

E. III. 16.

PROPOSITIO XIX.

§. 69. *Recta* T N (*Fig*. 49.) *quæ perpendicularis eſt ad Diametri extremitatem* N, *tota cadit extra Circulum, adeoque Tangens eſt*. II. E. III. 18. *Si ad Tangentis* T N *punctum contactûs* N *ducatur Radius* C N: *hic erit ad Tangentem perpendicularis*.

DEMONSTR. I. *Pars*. Quodcunque punctum (*s*) aſſignaveris in Recta T N, diverſum a puncto N; erit Recta *c s* ex centro ducta, ob angulum N Rectum & *s* acutum, major quam C N *. Quare ſi ipſius C *s* pars C *o*, æqualis ipſi C N, pertingit tantùm ad peripheriam; pars reliqua *o s* cum puncto *s* porrigetur ultra peripheriam. Unde jam tota T N cadet extra circulum. *Q. e. d.*

* Pr. 8.

DEMONSTR. II. *Pars*. Si neges; ſit alia quævis *s c* perpendicularis. Ergo angulus C *s* N Rectus eſt; N vero acutus: Unde N C major eſt quam C *s*; proinde & C *o*, æqualis

ipſi N C, eſt major ipſâ C r, i. e. pars eſt major Toto. Quod eſt abſurdum. Ergo. Tab. II.

Uſus Partis II. indicatus fuit §. 44. Digna lectu ſunt, quæ P. Taquet annotat ad hujus Propoſit. Partem I. h. e. ad Euclid. L. 3. propos. 16. Uſus.

PROPOSITIO XX.

E. III. 20.

§. 70. *Angulus A ad peripheriam* (Fig. 53.) *habet pro menſura dimidium illius arcûs, cui inſiſtit.* Ut ſi arcus B D C ſit 60 graduum, erit angulus A 30°.

DEMONSTRATUR per varios Propoſitionis caſus. I^mo^. *Si anguli* B A C * *latus unum tranſeat per centrum* O. Duc C O: erit angulus externus *m*, habens pro menſura arcum B D C, duplus interni *n* *. Ergo. II^do^. * *Si intra anguli* B A C *crura poſſit duci recta* A D *per centrum tranſiens.* Tunc enimvero externus *s*, habens pro menſura arcum B D, eſt duplus anguli *r*; pariter *m* ipſius *n*. Ergo arcus B D, D C, ſunt menſura dupla angulorum *r* & *n*; i. e. ipſius A. III^tio^. * *Quando nec anguli* B A C *latus unum, nec linea intra illum angulum ex* A *ducenda tranſit per centrum.* Ductis Diametro D A & Radiis B O, C O, eſt B O D duplus ipſius B A D, *per Caſum I*; item *n* duplus ipſius *i* *. Ablatis igitur *n* & *i*, reſtat B O C duplus anguli B A C. *Q. e. d.*

* Fig. 53.
* Pr. 7. Cor. 7.
* Fig. 54.
* Fig. 55.
* Pr. 7. Cor. 7.

§. 71. COROLLARIUM I. In Semicirculo (Fig. 56.) angulus B A C ad peripheriam eſt *Rectus*: Quippe habet pro menſura dimidium ſemicirculi, i. e. 90°. Angulus autem A in ſegmento, quod eſt minus ſemicir- E. III. 31.

culo, eſt *obtuſus*; in ſegmento majore *acutus*. Fig. 54. & 53.

Fig. 51. E. III. 22. §. 72. COROLLARIUM II. Quadrilateri (A D B E) Circulo inſcripti, anguli oppoſiti (v. g. A E B, A D B) ſimul ſumpti efficiunt duos Rectos. Nam, ut conſideranti patet, inſiſtunt duabus Peripheriæ partibus, quæ ſimul Totam conficiunt. Ergo.

§. 73. COROLLARIUM III. Omnes Anguli A * ad Peripheriam inſiſtentes eidem vel æquali arcui B D C, ſunt æquales: quippe omnes habent eandem menſuram, videlicet dimidium dicti arcus.

* Fig. 57. E. III. 21.

§. 74. COROLLARIUM IV. Practicum. * *Circulo Polygonum Regulare inſcribere.* Divide Peripheriam in tot æquales partes vel arcus, quot ſunt in Polygono latera: arcubus ſubtende chordas; erit factum. Nam præterquam quod latera ſint æqualia, *per Prop.* 16. *part.* 2; etiam anguli omnes Polygoni, *a*, *a*, *a* &c. ſunt æquales, *per Coroll.* 3.

* Fig. 47. E. IV. 2.

E. III. 17. * Fig. 58. *Docet nos hæc ipſa Propoſitio, quomodo ex puncto A * extra Circulum aſſumpto duci poſſit ad Circulum Tangens A B. Nam duc ad centrum rectam A C, quam biſeca in M, ex quo duces arcum ſemicircularem A B C: Linea A B, ducta ex A ad punctum interſectionis, erit (ob Rectum C B A Perpendicularis, adeoque Tangens per Prop.* 19. *part.* 1. *II. Docemur in extremitate lineæ Perpendicularem erigere. Vide* §. 40. *III. Docemur Normam vel Gnomonem examinare. Vide Tab. I. Fig.* 28. *Nam ducto ſemicirculo, dum Normæ Apex tangit Peripheriam, debent latera A C, A B poſſe ſimul radere Diametri extrema puncta C & B. Secus Norma fallit.*

PROPOSITIO XXI.

Fig. 61. §. 75. *Omne Polygonum Regulare circulo inſcriptum eſt æquale Triangulo* a g k, *cujus baſis* a g *continet ipſa Polygoni latera* A B, B C,

C D &c. *Cathetus autem* a k *eſt Perpendicularis* o p, *ex centro ad unam chordarum ducta.* Tab.II.

DEMONSTR. Ductis Radiis A O, B O, C O &c. reſolvitur Polygonum in tot Triangula, quot ſunt chordæ, eaque æqualia inter ſe *, habentia eandem altitudinem *o p* *. Sed A B O eſt ≍ *a b k*, B C O ≍ *b c k*, C D O ≍ *c d k* * &c. Ergo totum Polygonum æquatur toti *a g k*. *Q. e. d.* * Pr. 5. * Pr. 17. p. 3. * Pr. 12.

§. 76. COROLLARIUM I. Omne Polygonum Regulare Circulo inſcriptum poteſt dividi in tot Triangula æqualia, quot habet latera. Ac tunc anguli omnes ad Centrum ſunt æquales.

§. 77. COROLLARIUM II. Practicum. *Invenire angulum Centri in Polygono*, v. g. in Hexagono angulum B O C. *Fig. 61.* Divide Peripheriam i. e. 360° per numerum laterum Polygoni (ſcil. per *6*): quotus (*60*) dabit angulum ad Centrum. Nam quot latera, tot exiſtunt ad O anguli æquales, qui ſimul ſumpti efficiunt 360°. Ergo 360° diviſum per numerum laterum largitur angulum ad Centrum.

§. 78. COROLLARIUM III. Practicum. *Invenire Polygoni, v. g. Hexagoni, angulum* B C D. Subtrahe angulum ad Centrum (*60*) ex 180; Reſiduum (120.) dabit angulum dictum. Nam cùm Trianguli B C O anguli conficiant 180° *, ſubtracto Centri angulo (60) remanent anguli, *r* & *u*, ≍ 120°. Sed *u* ≍ *s*, ob Iſoſcelia B C O, C D O mutuo æquilatera. Ergo & *r* † *s*, ſive B C D continet 120°, ſeu Reſiduum ex 180°, poſt ablatum Centri angulum. Fig. 61. * Pr. 7.

PROPOSITIO XXII.

§. 79. *Triangulum* A B C, *cujus* B *ſis eſt ipſa Circuli* C *Peripheria in lineam rectam ex-* Fig. 62.

Tab.II. *tenſa*, *Cathetus* B-C *autem eſt ipſe Circuli Radius*, *æquivalet ipſi Circulo*.

DEMONSTR. Concipe Peripheriam Circuli diviſam in partes æquales plurimas minutiſſimas: poterunt partes iſtæ merito haberi pro lineis rectis (*Et vero arcus unius minuti phyſice nihil differt a linea recta; quanto minus differet a recta pars unius minuti millioneſima, quadrillioneſima, aut alia in infinitum minor?*) Adeoque Circulus æquivalet Polygono Regulari infinitorum prope laterum, in quo altitudo vel Perpendicularis ex Centro ducta nihil differt ab ipſo Radio. Sed tale Polygonum
* Pr.21. eſt æquale Triangulo ABC *. Ergo Circulus æquivalet ipſi ABC. *Q. e. d.*

§. 80. COROLLARIUM. Sector ABC, *Fig.* 50, eſt æqualis Triangulo *a b c*, cujus baſis *a b* eſt arcus AB, Cathetus *c b* eſt ipſe Radius.

E. IV. 15. Cor.

PROPOSITIO XXIII.

§. 81. *Latus Hexagoni eſt æquale Semidiametro.* i. e. AB = CA. Fig. 59.

*Pr.21. Cor.2. DEMONSTR. In Triangulo ABC angulus C eſt 60 graduum *, adeoque A & B ſimul
*Pr.7. Cor.3. 120°, ſinguli autem 60° *. Ergo ABC eſt æquilaterum. (*Si enim hoc non; ſed latus unum v. g. CA eſſet majus minusve altero AB;*
* Pr.8. *CA opponeretur majori minorive angulo* *, *contra Demonſtrata*). Ergo AB = CA. *Q. e. d.*

CAPUT

CAPUT II.

Tab. III.

De Proportione.

§. 82. Proportionis dogmata, quæ Magnitudini in genere conveniunt, poſſunt tuto ad quantitates etiam Numericas transferri: Unde PP. Taquet & De Chales Geometriam præmiſerunt Arithmeticæ, ut ex priore poſteriorem demonſtrarent. Non autem contra, quæ Numeris congruunt, cuivis magnitudini competunt; tum quòd proportioni numericæ, quà tali, non reſpondeat neceſſario quantitativa in magnitudine, tum quòd quantitates exiſtant Irrationales, quarum Ratio nequit numeris exprimi. Animus itaque erat Proportionis doctrinam latiore quadam ratione hic exponere, cui omnes omninò quantitates etiam Incommenſurabiles ſubeſſent. Verum cùm meminiſſem, quantum torquerent diſcentium ingenia illæ incommenſurabilium ſpinæ, quam vero commode iis carere Geometria Elementaris poſſet; mentem mutavi, & a quo nunc abſtineo, Algebræ reſervandum duxi, eam interim hîc methodum amplexus, quæ & ſalebroſa ab hiſce Inſtitutionibus reſecaret, & diſcentium animos ineſcaret potius, quam frangeret. Hunc in finem in §. 87. ſtatuo infinite parvorum Hypotheſin, cui ſi Axiomata ſubſequentia ſocientur, expedita in Geometricis reddetur Proportionalium pertractatio.

§. 83. Recolendæ hîc Definitiones omnes, expoſitæ in Arithm. Cap. 2. item Propoſitio 9. ibid. Ac de *Ratione Geometrica* apprime tenendum, eſſe illam duarum quantitatum reſpectum ſeu comparabilitatem ſecundùm modum, quo una continet alteram, aut continetur in illa; *Proportionem* autem eſſe duarum Rationum ſimilitudinem, cùm nimirum Antecedentia eodem modo aut continent ſua Conſequentia, aut continentur in iſtis. Ratio Geometrica mox definita dividitur in Rationem Æqualitatis & Rationem Inæqualitatis. Poſterior nova diviſione abit in *Rationalem* & *Irrationalem*. *Rationalis* eſt, quæ exiſtit inter duas quantitates commenſurabiles, i. e. tales, in quibus inveniri poteſt pars quæpiam, quæ pluries accepta adæquate exhauriat utramque. Quæ

Tab. III. Ratio numeris ſemper exhiberi poteſt. Si vero in quantitatibus duabus, qualescunque demum in partes ſecentur, nunquam poſſit inveniri menſura communis, quæ utramque metiatur, dicentur illæ ad ſe habere *Rationem Irrationalem*. Atque hæc nequit numeris exprimi: Si enim poſſet; hoc ipſo ùt unitas ceu communis menſura metitur omnem numerum, ita etiam pars una iſtarum quantitatum metiretur ipſas, contra ſuppoſitum.

§. 84. SCHOLION I. Dari numeros irrationales, jam oſtenſum eſt in Arithm. §. 79. & in Append. Additam. 8. pag. 143. In Geometria eadem Irrationalitas occurrit inter latus Quadrati ejusque Diagonalem. (Fig. 63.) Nam Quadratum lateris A C eſt æquale Quadratis laterum A B & B C, * adeoque duplum ſolius A B, i. e. ſe habet Quadr. A C ad Quadr. A B, ùt 2 ad 1. Sed Quadrati A B Radix poteſt quidem determinari per 1; Radix vero Quadrati 2. nequit (per citata Arithm. loca) ullis numeris integris aut fractis determinari. Igitur Ratio laterum A C, A B, Irrationalis eſt. Quam etſi nequeas numeris, poteris tamen lineis Geometricis A C & A B exprimere. Colligis exinde, fieri poſſe, ut Radices A C, A B ſint incommenſurabiles, harum tamen Quadrata ſint Commenſurabilia, cùm ſint ùt 2 ad 1. 2do, ſi Quadrata ſint incommenſurabilia, etiam horum Radices tales fore.

* Prop. 15.

§. 85. SCHOLION II. Ex hac Incommenſurabilitate multi arguunt *primò*, lineam componi ex partibus in infinitum diviſibilibus; adeo ut latera A C, A B, nequaquam ex indiviſibilibus coaleſcant: indiviſibilia enim utpote æqualia largirentur tandem menſuram communem, quod hic repugnat. Hinc *ſecundo* inferunt, continuum phyſicum componi ex punctis infinitis; at peſſimâ ſequelâ, ùt ego quidem ſentio. Nam hæc Incommenſurabilitatis Demonſtratio non procedit, niſi ex facta quapiam Hypotheſi, E. G. ſuper A B * exiſtere unum, & ſuper A C duos pedes Quadratos, in exactiſſimam Quadrati figuram utrobique redactos; vel Quadratum dividi ſine fine in quadratula minoris ſpeciei; vel poſito, Radicem componi ex integro & fracto &c. Quæ ſingula, utrum Continuo phyſico revera inſint aut ineſſe poſſint, non hypothetice aſſumendum, ſed ùt abſolute verum priùs demonſtrandum eſſet.

* Fig. 63.

ARTICULUS I.

De Proportione Figurarum magis ſimplicium, nempe Triangularium.

DEFINITIONES.

§. 86. I. *Figuræ æquiangulæ* ſunt, quæ

totidem habent angulos mutuo æquales. Ita Triangula * A B C, *a b c* ſunt æquiangula, ſi ſit A ≍ *a*; B ≍ *b*; C ≍ *c*. Tab. III. * Fig. 64.

II. *Figuræ ſimiles* ſunt, quæ cùm totidem latera & angulos contineant, angulos habent ſingulos ſingulis ex ordine æquales; & latera circa æquales angulos proportionalia.

Ut ſi in * A B C & *a b c* ſit A ≍ *a*; B ≍ *b*; C ≍ *c*; & ſit latus A B ad *a b*, ùt B C ad *b c*; & B C : *b c* : : C A: *c a* : : A B : *a b*; erunt Triangula hæc ſimilia. Sic etiam dantur ſimilia Quadrilatera & Polygona *; Duarum Figurarum ſimilium latera, quæ ſibi in proportione reſpondent (ùt in Fig. 64. A B, *ab*; B c, *bc* &c.) *Homologa* dicuntur. * Fig. 64. * Fig. 78. 79. 80.

III. *Arcus ſimiles* ſunt, quæ habent eandem Rationem ad ſuam Peripheriam. Ut ſi uterque arcus ſit ſuæ Peripheriæ pars 3tia vel 7ma.

HYPOTHESIS.

§. 87. Supponimus, inter Magnitudines, de quibus in hac Geometria Elementari agemus, exiſtere Rationem Rationalem & communem quandam menſuram, atque idcirco Magnitudines inter ſe comparandas componi ex partibus æqualibus infinite parvis.

Quare ſi forſan Irrationalis Ratio verſetur inter * A & B; hæc ad Rationalem revocabitur, ſi concipias unam, v. g. B, dividi in duas partes æquales, & harum quamvis in alias duas, has rurſum biſecari in alias, & ita ſine fine deinceps. Quo pacto tandem devenies ad partes minutiſſimas, quas *infinite parvas* dicimus; quarum una, v. g. *p*, certe metietur ſuum Totum B, alteram vero Magnitudinem A tam propinquè, ut defe- * Fig. 65.

Tab. III. ctus, *r*, minor futurus ſit parte una infinite parva, i. e. nullius momenti, imo pro nullo habendus ſit.

§. 88. SCHOLION. Partes haſce minutiſſimas malunt quidam dici *indefinite* quam infinite parvas. Parum refert, quo eas nomine inſignias, modo de re ipſa conſtet. Infinite parvas dices, non quòd Totum actu componatur ex infinito harum numero (infinitum enim tale dari, Metaphyſicus quispiam nōn abs re negabit); ſed quòd liceat concipere, Magnitudinem propoſitam ſecari in minores & minores uſque partes, nullo præfixo dividendi termino, quoad tandem Totum diviſum fuerit in partes adeo minutas, quæ Demonſtrationibus faciendis tam cumulate ſatisfaciant, ut nec omnimodus rigor Geometricus plus præſidii conferre poſſit ad Geometriam utilem, i. e. talem, quæ & excuſſo inanium ſpeculationum otio ad praxes ſoletter referatur, & uſibus aliarum ſcientiarum, Phyſicæ præprimis, ſubſerviat. Geometria autem Practica ad determinatam quampiam menſuram, ceu unitatem, Magnitudines ſuas omnes inveniendas explorat, ſpernens minutiſſimum ſuæ menſuræ defectum; quemadmodum & Phyſicum nihil torquet ſubjecti ſui minutia infinite parva.

AXIOMATA.

Fig. 67. §. 89. I. Si Magnitudines X & Z dividantur in æque multas partes æquales, utraque v. g. in partes 4: erit ùt una pars A ad aliam *a*, ita duæ partes in X ad duas in Z, ita tres in X ad tres in Z &c. Demum ùt Pars ad partem (vel Pars ſimilis in X ad ſimilem in Z) ita Totum X ad Totum Z.

Unde ſi Pars A ſit dupla alterius a, *erit & Totum X duplum Totius Z; & tres quartæ ipſius X duplum trium quartarum in Z. Imo ſi A dicat Rationem certam Irrationalem ad* a, *& eandem dicat B ad* b, *C ad* c *&c. æque perſpicuum eſt, quanto majus eſt A ipſo* a (ſecundùm modum continendi), *tanto majus pariter eſſe complexum ex duobus A complexo ex duobus* a. *&c.*

Fig. 68. II. Si Magnitudines R, S, componantur ex certo partium utrimque mutuo æqualium numero, & unaquæque harum pro unitate ſumatur; poterit ipſarum R & S ad ſe habitu-

do numeris efferri. Quare *in Fig*. 68, erit R ad S, ùt 4 ad 3. Tab. III.

Alia Axiomata huc facientia extant in Arithm. Cap. 2. §. 43. *E quibus memoriâ maxime tenenda duo, quibus frequentius nobis opus erit; puta:*

III. Quantitates, quæ habent eandem Rationem ad tertiam, ſunt æquales.

IV. Rationes ſimiles tertiæ vel pluribus ſimilibus, ſunt etiam ſimiles inter ſe.

PROPOSITIO XXIV. E.VI. 2.

§. 90. *Si in Triangulo* A B C *ducatur recta* M N *parallela Baſi: ſecabit hæc crura proportionaliter, ita ut ſit* C M *ad* M A, *ùt* C N *ad* N B. Fig. 69.

DEMONSTRATUR. In cruris minoris parte A M aſſumatur aliqua menſura communis metiens & alteram partem M C *. Sit hæc e. g. *r*, quæ contineatur bis in A M, & in M C quater. Concipe nunc e punctis diviſionum duci ad crus alterum lineas Baſi parallelas: ſecabitur & ipſum C B in totidem partes æquales, quot ſunt in C A *, adeo quidem, ut & B N ad N C ſeſe habeat velut 2 ad 4; & univerſim qualem magnitudinis reſpectum habet A M ad M C, talem etiam habeat B N ad N C. *Q. e. d.* * Hyp. §. 87. * Pr. 10.

§. 91. COROLLARIUM. Patet, etiam *componendo* eſſe A M + M C : C M : : B N + N C : C N, i. e. Totam C A eſſe ad C M, ùt tota C B ad C N. Pariter (*per Axio*. 1.)

Tab. III. valebit, *alternando*, ùt C A ad C B, ita C M ad C N; nempe ut unum *r* ad unum *s*, ita duo *r* ad duo *s*, ita 4 *r* ad 4 *s*. ita 6 *r* ad 6 *s*. &c.

Uſus. *Hæc Propoſitio, & duæ ſequentes cum ſuis Corollariis bene penetrentur: perneceſſariæ namque ſunt tum ad ſequentia, tum ad Trigonometriam, & ad Praxeon nobiliſſimarum explicationem.*

E.VI.4. PROPOSITIO XXV.

§. 92. *Triangula* (A B C & X) *æquiangula*, *ſunt ſimilia*. Hoc eſt, ſi ſit A = *a*; B = *b*, C = *c*; erit Imo. C A : *ca* : : C B : *cb*. IIdo. C A : *ca* : : A B : *ab*. IIItio. A B : *ab* : : B C : *bc*. Adeoque latera æqualibus angulis oppoſita ſunt proportionalia.

Fig. 69.

DEMONSTRATUR. Si concipias, imponi Triangulo A B C alterum *a b c*, & angulo C æqualem *c*; incumbent latera *c a*, *c b*, lateribus C A, C B: & ob æquales angulos A & *a*, erit Baſis *a b* parallela cum A B *. Ergo ut A *a* : *a* C : : B *b* : *b* C *; & *componendo*, ùt C A : *c a* : : C B : *c b*. *Quod erat primum*. Eodem modo demonſtrabis IIdum * & IIItium.

*Pr. 6. p. 2.
*Pr. 24.
*Vide Figuram 70

Alternando autem valebit, C A : C B : : *ca* : *c b*. Et C A : A B : : *c a* : *a b*. Item A B : B C : : *a b* : *b c*.

§. 93. COROLLARIUM I. Si in Triangulo A B C ducatur *a b* parallela cum uno laterum; erunt duo Triangula A B C, *a b c*, æquiangula (*propter* C *communem*, & A = *a*; B = *b* *) proinde & ſimilia.

E. VI. Pr. 4. Cor.
*Pr. 6. p. 1.

§. 94. COROLLARIUM II. Triangula A B C, & X (Fig. 69.) ſunt ſimilia, ſi habeant angulos duos mutuo æquales, v. g.

A = *a*, B = *b*. Tunc enim æquantur & reliqui, C, *c* *. Ergo æquiangula ſunt, & ſimilia. Tab. III. * Pr. 7. Cor. 1.

§. 95. COROLLARIUM III. Practicum. *Si dentur duo* * *Triangula ſimilia* A B C, a b c; *datis in primis lateribus* B A, B C, 24 *&* 18 *pedum, cognito autem in* a b c *uno ſolum latere homologo* a b, 12 *pollicum; cognoſcere & alterum* b c, *homologum cum* B C. Fiat enim per Regulam auream, ùt 24 ad 18, ita 12 ad 9 = *bc*. Nam cùm ſit B A : B C : : *b a* : *b c*, ponatur autem eſſe B A ad B C ùt 24 ad 18; etiam in altera æquali Ratione erit *b a* ad *b c* ùt 24 ad 18; cui cum æquipolleat ſecundùm modum continendi iſta 12 : 9; vides, per Arithmeticam Proportionis Regulam erui quartum proportionalem. * Fig. 64.

PROPOSITIO XXVI.

§. 96. *Si Triangula* A B C, & X *habeant omnia latera proportionalia* (ùt ſi ſit C A : A B : : c a : : a b; & A B; B C : : a b : b c; & B C : C A : : b c : c a) *etiam ſunt æquiangula.* E. VI. 5. Fig. 69.

DEMONSTRATUR. Abſcindatur in majoris A B C latere C A linea C M = *c a*, & ducatur M N parallela cum A B. Jam vero eſt * ut C A : A B : : C M; i. e. *c a* : M N. Eſt item * C A : A B : : *c a*, i. e. C M : *a b*. Ergo M N & *a b*, habentia eandem Rationem ad tertium *c a* vel C M, ſunt æqualia *. Eodem modo oſtendo, latus *c b* æquari lateri C N: unde ſequitur, Triangula *a b c* & M N C eſſe mutuo æquilatera & æquiangula *. Sed M N C eſt æquiangulum cum A B C **; ergo & *a b c*. *Q. e. d. Obſervabis autem æquales eſſe illos angulos, qui opponuntur homologis lateribus.* * Pr. 25. Cor. 1. * Hyp. * Ax. 3. * Pr. 5. ** Pr. 25. Cor. 1.

§. 97. COROLLARIUM I. Si duo Triangula (A B C & X) habeant circa æquales an- E. VI. 6.

Tab. III. gulos A & *a* latera proportionalia; erunt & æquiangula & ſimilia. Nam ſi fiat C M = *ca*, & M N parallela cum A B, ac demonſtratio perficiatur ùt mox data; patebit, æquari Triangula M N C, *a b c*, anguloſque C & *c*. Unde jam liquent reliqua.

Fig. 66. §. 98. COROLLARIUM II. Si in Triangulis ſimilibus A B C, *abc*, ducantur ex æqualibus angulis C & *c* ad baſin Perpendiculares C P, *c p*: erunt & iſtæ proportionales cruribus, i. e. P C : C A : : *p c : c a*, & *alternando* P C : *p c* : : C A : *c a*. Nam quia in Triangulis A P C, *a p c* æquales ſunt anguli Recti, item A & *a* *, æquabuntur & reliqui, atque hinc dicta latera proportionalia erunt *.

* *per præſentem.* * *Pr.* 25. E. VI. 8.

PROPOSITIO XXVII.

§. 99. *Si in Triangulo rectangulo ducatur* Fig. 72. *ex angulo recto* C *Perpendicularis* C P *ad Hypotenuſam: ſecabitur hoc Triangulum in alia duo* X *&* Z, *ſimilia Toti* A B C, *& ſimilia inter ſe.*

* *Pr.* 25. *Cor.* 1. DEMONSTR. I^mo. Z eſt ſimile Toti A B C*, ob æquales ambos Rectos & communem B. II^do. In X & A B C angulus A eſt communis, æquales etiam ſunt horum Recti, igitur & reliqui *s* & B. Ergo X & A B C ſunt ſimilia *. III^tio. X & Z habent ambo æquales Rectos, item *s* & B *. Ergo & ipſa ſunt ſimilia. *Q. e. d.*

* *Pr.* 25. * *ex parte præced.*

§. 100. COROLLARIUM. Lineæ B P, P C, P A, ſunt tres continue Proportionales. Nam ùt Trianguli Z baſis B P ad ſuum Cathetum P C, ita eadem P C tanquam baſis Trian-

guli X ad ſuum Cathetum P A. IIdo. Quare ſi in Semicirculo ducatur ex Peripheria ad Diametrum Perpendicularis C P, hæc erit Media Proportionalis inter Diametri ſegmenta A P, P B. Nam ductis A C, C B exurget angulus C Rectus *. Ergo. Tab. III. * Pr.29. Cor.1.

Hinc docebimur §. 168. *Mediam proportionalem invenire, &* §. 815, *quodvis Parallelogrammum in æquale Quadratum convertere.* Uſus.

ARTICULUS II.

De ſimilitudine Figurarum Quadrilaterarum & Polygonarum.

PROPOSITIO XXVIII.

§. 101. *Parallelogramma* A C, a c, *habentia eandem altitudinem, vel intra easdem parallelas conſtituta, eam inter ſe habent Rationem, quam ipſæ Baſes.* E.VI.1. Fig.73.

DEMONSTRAT. Sumatur Baſium A B, *ab*, communis menſura * A *o*, quæ contineatur in prima v.g. quater, in altera ter. Concipi poterunt intra Parallelogrammum A C quatuor, & intra *a c* tria parallelogramma, ſingula mutuo utrinque æqualia *. Unde ſi Baſis ad baſin ſit velut 4 ad 3, etiam A C ad *a c* eſt ùt 4 : 3. *Q. e. d. Quod vero de Ratione 4 : 3, i d de quavis alia pari modo valet.* * §. 87. * Pr.10. Cor.1.

§. 102. COROLLARIUM. Etiam Triangula ejusdem Altitudinis (ABG, *a b g*) ſe habent adinvicem ùt baſes. Sunt enim Totorum (A C, *a c*) dimidia. E.VI.1.

SCHOLION. *Apparet hìc maxime Hypotheſeos ſuperioris utilitas. Nam pone* (Fig. 73 & 74) *baſeos* a b *tres partes eſſe quidem æquales inter ſe, ſed ſingulas dicere Rationem irrationalem ad illas in* p q; *non aſſequêris continuo, ùt* a b *eſt ad* p q, *ita* a c *eſſe*

Tab. III. *ad p x. At enim in noſtra methodo Propoſitio hæc apertiſſima eſt. Veteres illam, uti & reliquam omnem Proportionis doctrinam, probabant per quantitates æque multiplices; definiebantque duas Rationes eſſe ſimiles, quando Antecedentium quælibet æque multipla ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora quibuslibet, Conſequentium æque multiplis. Quam Definitionem merito carpit P. Taquet Elem. Geom. L. 5. Cumque hæc Multiplicium difficultas Proportionum materiam redderet ſummopere perplexam & intricatam, Recentiores ab illa cum laude abſtinuerunt.*

*Fig. 74. *Obſerva*. Geometra manifeſtaturus Parallelogrammi * latera, ſub quibus iſtud continetur, compellat ſolummodo duo contigua (e. g. $p\,q$, $q\,x$) nam ex his intelliguntur reliqua, compellatis oppoſita, utpote his æqualia *.

* *Pr.* 9.

E. VI. 16. **PROPOSITIO XXIX.**

Fig. 75. §. 103. *Si dentur 4 Rectæ proportionales,* A, B, C, D: *Rectangulum* M, *quod continetur ſub extremis* A *&* D, *eſt æquale Rectangulo* N, *contento ſub mediis* B *&* C. II. *Si* M *&* N *ſunt Rectangula æqualia, habebunt latera reciproce proportionalia, h. e. ut primi baſis* A *eſt ad ſecundi baſin* B, *ita ſecundi altitudo* C *eſt ad primi altitudinem* D.

DEMONSTRATUR I. *Pars*. Rectangulis M & N ad angulum Rectum o conjunctis (prout Figura oſtendit), producantur & concurrant latera $r\,s$, $x\,z$, in k. Stabunt tria Parallelogramma M, R, N. Jam vero ob eandem altitudinem $s\,o$, eſt ut

*Pr. 28. A : B : : M : R *. ob ſimilem rationem eſt C : D : : N : R. Sed Rationes A : B, C : D

* *Hyp*. ſunt ſimiles *, ergo & alteræ M : R, N : R. Igitur M & N habentia eandem Rationem ad

* *Ax*. 4 tertium R, ſunt æqualia *. *Q. e. d.*

DEMONSTRATUR II. *Pars*. Conjungantur Rectangula, ita ut A & B faciant unam

Rectam; facient & *t o*, *o s* unam Rectam*: perficiantur reliqua ùt ſupra. Tab. III.
Jam vero ùt M : R : : A : B* Pariter eſt ùt N i.e. M : R : : C : D. Ergo* A, B, C, D ſunt Proportionales. *Q. e. d.* *Pr. I. Schol. *Pr. 28. *Ax. 4.

§. 104. COROLLARIUM. Si dentur tres continue proportionales A, B, D: Rectangulum ſub extremis eſt æquale Quadrato Mediæ B. Nam ſumatur C æqualis ipſi B, habebis 4 Proportionales A, B, C, D. Ergo Rectangulum ſub extremis æquatur Rectangulo ſub mediis, i. e. Quadrato lateris B. E. VI. 7. Fig. 76.

SCHOLION. *Vides, demonſtrationes has eſſe analogas iis, quas in Arithm. Prop. 7. dedimus. Unde porro ex datis 4. Proportionalibus, aut Rectangulorum æqualitate, licebit demonſtrare modos argumentandi Geometricos, qui valent, terminos commutando, invertendo, alternando, componendo, dividendo. Id quod examinare tuæ relinquitur induſtriæ.*

Utilitatem hujus Propoſitionis percipiemus in §§. 122. 215. Uſus.

PROPOSITIO XXX. E. VI. 23.

§. 105. *Duo Rectangula* (X, Z) *ſunt in Ratione Compoſita Baſium* a, b, *&* *Altitudinum* c *&* d. Fig. 77.

DEMONSTR. Conjungantur Rectangula ùt in Prop. præc. & compleatur tertium R. Jam vero eſt ùt X : R : : *a* : (*b*, *per Propos*. 28.) ſimiliter eſt R : Z : : *c* : *d*. Ergo (*ùt oſtenſum fuit in Arithm. Prop.* 31. *Coroll.* 4. *pag.* 106.) X eſt ad Z in Ratione Compoſita Baſium & Altitudinum, i. e. *a* : *b*, *c* : *d*. *Q. e. d. Quare ſi iſtarum Rationes fuerint* 1 : 4, *&* 2 : 2 *ſeu* 1 : 1; *erit Exponens Rationis* X : Z, $\frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4}$.

§. 106. COROLLARIUM I. Quævis Parallelogramma etiam non Rectangula, ſunt E. VI. 23.

Tab. III. ad ſe in *Ratione Compoſita* Baſium & Altitudinum. Nam ex non Rectangulis poſſunt fieri Rectangula illis æqualia *, manentibus iisdem Baſibus & Altitudinibus.

* Pr. II. Cor. I.

§. 107. COROLLARIUM II. Si Rectangula (v. g. in Fig. 78, A C, *a c*) ſint ſimilia, i. e. ſi habeant Baſes & Altitudines proportionales (ita ut ſit A B : *a b* : : A D : *a d*) erit primum ad alterum (A C ad *a c*) in Ratione *Duplicata* vel ſolarum Baſium, vel ſolarum Altitudinum *. Cùm Ratio Baſium hîc æqualis ſit Rationi Altitudinum. Proinde omnia Quadrata, utpote Rectangula ſimilia, ſunt ad ſe in Ratione Duplicata unius lateris ad aliud. *Quare ſi ſit* A B *dupla ipſius* a b, *erit* A C *duplo duplum ſeu quadruplum ipſius* a c: *ſimiliter Quadratum* A Q *quadruplum quadrati* a q.

* Vide Arithm. §. 86. n. 2. & I. §. 89. Cor. 4.

§. 108. COROLLARIUM III. Rectangula ſimilia * A C, *a c*, ſunt inter ſe ùt Quadrata (A Q, *a q*) ſuper Baſes ſuas vel Altitudines conſtituta. Etenim tam Quadrata, quam dicta Rectangula ſunt ad ſe in *Ratione duplicata* Baſium A B, *a b*.

* Fig. 78.

§. 109. COROLLARIUM IV. Etiam Triangula quævis (E. G. * A B G, *a b g*) ſunt ad ſeinvicem in *Ratione Compoſita* Baſium & Altitudinum. Nam ſunt Parallelogrammorum A C, *a c*, dimidia. Hinc

* Fig. 73.

E. VI. 19. §. 110. COROLLARIUM V. Triangula quævis ſimilia (v. g. A B C, *abc*, Fig. 66.) ſunt ad ſe in *Ratione Duplicata* homologorum quorumvis laterum (v. g. A B, *a b*; vel A C, *a c*; vel C B, *c b*; vel Altitudinum C P, *c p*.

Quippe cùm ſint in Ratione compoſita Baſium & Altitudinum, Ratio vero Altitudinum eadem ſit cum Ratione A C: *a c*, vel C B: *c b* *, & iſtæ cum A B: *a b* *, patet aſſertum. Unde porro A B C & *a b c* ſunt ad ſe uti Quadrata Q & *q*, homologorum quorumvis laterum (v. g. A C, *a c*) vel Altitudinum. Quare ſi C P ad *c p*, vel A C ad *a c* ſit ùt 5 ad 3, erit A B C ad *a b c*, ùt 25 ad 9. Tab. III. * Pr. 26. Cor. 2. * Def. 6.

§. 111. Corollarium VI. Parallelogramma & Triangula æqualium Baſium ſunt ad ſe in Ratione Altitudinum. Nam Baſium Ratio 1:1 nihil multiplicat. Ex eodem capite Parallelogramma æqualium Altitudinum ſunt ad ſe in Ratione Baſium. E. VI. Pr. 1. Cor.

Propositio XXXI.

§. 112. *Polygona Regularia Circulo inſcripta & ſimilia, ſunt in Ratione Duplicata Perpendiculorum* O P, *o p*. Fig. 79.

Demonstr. In Iſoſceliis A B O, *a b o*, anguli ad O & *o*, ſimilium nempe arcuum ſunt æquales, atque inde reliqui ad Baſin ſunt ſibi utrimque mutuo æquales, nempe A = *a*, B = *b*. Igitur hæc Triangula ſunt ſimilia * & in Ratione Duplicata Altitudinum O P, *o p* *. Sed utrumque Polygonum poteſt dividi in æqualem numerum Triangulorum æqualium * & æque altorum; atque hinc ùt A B O eſt ad *a b o*, ita complexum ex A B O † C † D † E † F † G ad complexum ex *a b o* † *c* † *d* † *e* † *f* † *g* *, hoc eſt, ita primum Polygonum ad ſecundum. Ergo & primum ad hoc eſt in Ratione Duplica- * Pr. 26. * Pr. 30. Cor. 5. * Pr. 21. Cor. 1. * Ax. 1.

Tab. III. ta dictarum Perpendicularium (vel etiam Radiorum A O, *ao*). *Q. e. d.* Et, *ex Prop.* 30. *Cor.* 5, primum eſt ad ſecundum, ùt OP^2 ad op^2, vel ùt AO^2 ad ao^2.

§. 113. COROLLARIUM I. Quia Circuli poſſunt conſiderari ùt Polygona ſimilia infinitilatera *; erunt illi inter ſe in Ratione Duplicata ſuarum Perpendicularium, i. e. ſuorum Radiorum, vel uti Quadrata Radiorum, vel (quia Diametri ſunt ut ipſi Radii) uti Quadrata Diametrorum. II. E converſo Circulorum Diametri vel Radii ſunt ad ſe in Ratione Circulorum ſubduplicatà, i. e. ùt Radices quadratæ Circulorum, pro Quadratis habitorum.

* *Vide Pr.* 22.

§. 114. COROLLAR. II. Sectores ſimiles, APBO, *apbo*, ſunt pariter ad ſe in Ratione Duplicata Radiorum. *Fig.* 79.

§. 115. SCHOLION. Polygona Irregularia ſimilia, BE,
E. VI. *be* *, poſſunt *primo* dividi in æque multa Triangula, M, *m*;
Pr. 20. N, *n*; P, *p*, ſimilia inter ſe. Nam ductis in utraque Figura re-
* Fig. 80. ctis D A, D B; *da*, *db*, ſunt M & *m* ſimilia *; ob angulos æquales E & *e*, & latera circa hos proportionalia. Ergo primum æquantur anguli *r* & *s* *, qui ſi ſubtrahantur ex totis & æqualibus A & *a*,
* *Pr.* 26. reſidui *t* & *u* ſunt æquales. Deinde eſt D A : *da* :: E A : *ea* ** ::
Cor. 1. A B : *ab* *. Ergo ob latera proportionalia * D A, *da*; A B; *ab*,
* *Pr.* 26. circa æquales angulos *t* & *u* conſtituta, ſimilia ſunt N & *n*, & ex eadem ratione P & *p*. *Secundo*, Polygona ſimilia A E, *be*, ſunt etiam
** *Def.* 2. ad ſe in Ratione Duplicata homologorum laterum, v. g. A B, *ab*. Nam eſt M ad *m*, N ad *n*, P ad *p*, in Ratione Dupl. laterum E A : *ea*;
* *Hyp.* A B : *ab*; B C : *bc* *: hæ autem Rationes omnes (ex præcedente
* *Ax.* 4. diſcurſu) æquales ſunt inter ſe. Ergo M + N + P eſt ad *m* + *n*
* *Pr.* 30. *Cor.* 5. + *p*, in Ratione Duplic. A B : *ab*.

GEOMETRIÆ
PARS II.
Euthymetriæ et Planimetriæ Problemata præcipua.

CAPUT I.
Trigonometria Plana.

Trigonometria eſt ſcientia & Ars, datis tribus Trianguli partibus inveniendi reliquas.

Partes autem illæ ſunt latera & anguli; ab area enim hîc abſtrahitur. Dividitur vero Trigonometria in Planam, quæ de Triangulis planis, & in Sphæricam, quæ de ſphæricis agit. Sphæricam Aſtronomia & Geographia præprimis, Planam præſens Caput I. ſibi vendicat, propterea quod ejus cognitio mox in ſequentibus profutura ſit. Ejus præterea utilitas late dimanat in Aſtronomiam, dum ſiderum a Terra diſtantias metitur, in Gnomonicam, & alias paſſim Matheſeos partes. Unde ab eo, qui egregios in Matheſi progreſſus deſiderat, minime negligenda.

§. 116. DEFINITIO I. Si in Quadrante C A L ex arcûs A B L puncto aliquo B Tab. IV. Fig. 81.

Tab. IV. ducatur in Radium Perpendicularis B D: dicitur hæc *Sinus Rectus* *, vel ſimpliciter *Sinus* arcûs A B vel anguli A C B, cujus menſura eſt dictus arcus.

* *ob angulum Rectum*

Ita & Perpendicularis O P eſt Sinus arcûs P L; & X K eſt Sinus arcûs H X. Omnis igitur Sinus eſt dimidium alicujus Chordæ (*per Propos.* 17. part. 1). B D quidem Chordæ B R: P O, chordæ P X.

DEFINITIO II. *Sinus verſus* anguli A C B eſt Radii pars A D, intercepta inter arcum & Sinum dicti anguli.

DEFINITIO III. *Sinus Complementi* vel *Coſinus* arcûs A B, vel anguli A C B. dicitur Sinus B M, obverſus reliquo Quadrantis arcui L B, complenti cum A B 90 gradus. Viciſſim ſi B M habeatur pro Sinu, erit B D Sinus Complementi: Et Sinûs O X Coſinus eſt X K.

DEFINITIO IV. *Tangens* Anguli A C B vel arcûs A B eſt recta A G, Perpendicularis ad Radii extremitatem A, & producta occurrens alteri C G, quæ ex Centro per alterum arcûs extremum B ducitur, & *Secans* vocatur.

§. 117. SCHOLION. *Si arcus A B L dividatur in ſuos 90 gradus, & horum quivis in 60 minuta, atque ab extremitatibus arcuum minuti unius, minutorum 2, 3, 5 &c. demittantur in Radium A C Perpendicula, habebis 5400 Sinus, quorum maximus eſt ipſe Radius, qui propterea &* Sinus Totus *audit. Reperire jam & noſſe, quam Magnitudinis Rationem hi omnes 5400 Sinus inter ſe habeant, primus Trigonometriæ labor eſt. Quod ut definiri poſſit, oportet primùm Radium in certas partes dividere, atque ex his reliquorum magnitudinem determinare. Veteres, ut Hipparchus, Menelaus, Ptolomæus,*

pro

pro aſſequendo Trigonometriæ fine inveſtigabant proportionem, quam ſingulorum arcuum Chordæ ad ſe haberent, Radium dividentes in 60, & porro ſubdividentes in alias 60 partes. Arabes poſtea brevioris calculi ergo Chordarum dimidia i. e. Sinus adhibuerunt. Sinuum horum Tabulas primus edidit A. 1556 Regiomontanus, tribuens Radio partes 600000, quem poſtea commodius diviſit in partes 100000. Joachimus Rheticus Sinus omnes a decimo quovis minuto ſecundo ad aliud operoſe ſupputavit, Radium ponens 1000000000000000 *partium; evulgavit autem iſtos, ad Radium* 10000000000 *tantum ſupputatos, idque eo conſilio, ut errores, qui propter crebras extractiones Radicum e Quadratis non exactis, tum ex fractionum neglectu poſtremis calculi notis adhærent, una cum poſtremis* 5 *notis reſecarentur. Qui hodie paſſim proſtat Sinuum Canon (ita vocantur Tabulæ Sinuum Tangentium & Secantium) Radium ſupponit, in* 10.000.000 *partes diviſum, oſtenditque, quot partes deci-millioneſimæ competant unicuique Sinuum. Quanquam vero alienus ſed arduus Majorum labor Sinuum calculum pridem nobis ſuppeditaverit; non injucundum tamen erit cognoſcere, qua via quave methodo is prodierit, aut ſaltem prodire poſſit. Me certe parum oblectaret harum uſus Tabularum, niſi & modum, quo conſtruerentur, tenerem. In brevioribus Geometriæ Elementis nondum illum reperi omnimode explicatum. Etiam qui prolixius ſcripſerunt, dum ad Sinum* 72 *vel* 36 *vel* 18 *graduum ventum eſt, plerumque Tironem remittunt aut ad Ptolomæi Almageſtum, aut ad Algebram, aut ad Euclidis L.* 10, *loca ardua & multis inacceſſa. Ex jactis in parte I. fundamentis totum condendi Canonis artificium ſic habe.* Tab. IV.

DIGRESSIO,

ad Canonis Trigonometrici conſtructionem.

§. 118. LEMMA I. *Dato cognitoque Sinu* XK *arcûs* XH, *invenire* XO *Sinum Complementi, vel* KC *ipſi æqualem.* Fig. 81.

Sit Sinus Totus partium 10000, & XK 2756. Ducatur Radius CX. Jam vero * XC^2 (= 100000000,) *Pr. 15.

Tab. eſt æquale Quadratis XK^2 (= 7595536) & KC^2. Ergo
IV. ſi ſubtrahas XK^2 ex XC^2, reſtabit KC^2 = 92404464, cujus Radix 9612 dabit lineam K C vel XO. COROLLARIUM. Invento Complemento XO vel K C, invenitur etiam Sinus Verſus K H, ſi nempe ſubtrahas inventam K C ex toto Radio C H: nam reſiduum dabit ipſam K H; quæ in dato mox caſu erit 388.

Fig.85. §. 119. LEMMA II. *Dato Sinu* L D *arcûs cujusvis* A L (e. g. arcûs 60°) *invenire Sinum arcûs dimidii* (nempe Sinum 30°).

Invento, ùt ſupra, Conſinu L P, & Sinu Verſo A D, extrahe Radicem ex $AD^2 + LD^2$. Hæc dabit Chordam A L, & hujus ſemiſſis L O, quæſitum Sinum.

Fig.85. §. 120. LEMMA III. *Dato Sinu* A O, *arcûs* A M, *inveſtigare* L D *Sinum dupli arcûs*, i.e. *arcûs* L M A.

Quia Triangula C O A & L D A ſunt æquiangula, ob angulos utrobique Rectos & A communem; hinc infera-
* Pr.25. tur *: ùt C A ad C O (*quæ cognoſcitur ex* CA^2, AO^2 *)
Cor. 3. ita A L (*Duplum dati* A O) ad L D.
* Pr.15.
Cor. 1. §. 121. LEMMA IV. *Datis Sinubus* AC, BD,
Fig.86. *invenire Sinum arcûs intermedii* A B.

Subtrahe M B vel N O, Sinum Complementi, ex primi Complemento N A, ut innoteſcat A O; item Sinum AC i.e. O D ex BD, ut conſtet B O. At ex notis nunc
* Pr.15. A O, B O, proditur Chorda A B*, ex hac Sinus B x, ex
Cor. 1. hoc, *per Lemma præced.*, Sinus totius arcûs AB. *Si ponas, notos eſſe Sinus* B M, A C; *pari modo invenies Sinum arcûs intermedii* A B.

PROBLEMA I.

Invenire Sinus Primarios.

Fig.81. §. 122. I. *Invenire Sinum* F r 45 *graduum*. Ex $CF^2 + CH^2$ eruta Radix dat rectam F H, & hujus Semiſſis Sinum F r; *Ex hoc invenies per Lemma* 2. *Sinus* 22° 30'; 11° 15'; *& horum Conſinus per Lemma* 1.

II. *Invenire Sinum* 30°., Quia Chorda 60 graduum Tab.
eſt ipſe Radius *: dabit hujus Semiſſis Sinum 30°: *Et* IV.
Lemma 2. *Sinus* 15°; 7°30′; 3° 45′; *& Lemma* 1. *ho-* * *Pr*.23.
rum Conſinus.

III. *Invenire Sinum* 18°. Præmittendum hoc Fig. 89.
THEOREMA. *Si Recta* C B *ſit ſecta proportionaliter*
ad Totam (vel ùt Antiquorum phraſi utar, ſi ſit ſecta Mediâ
& Extremâ Ratione) *hoc eſt ita, ut ſit Tota* B C *ad*
CD, *uti* C D *ad* D B; *ejusque pars una* C D *ſit æqualis*
Radio Circuli BDF: *erit altera pars* D B *latus Decagoni*
in eodem Circulo. DEMONSTR. Circulo, per
Radium C D deſcripto, applicetur ita ipſa C B, ut pars
B D fiat Chorda, Radius vero D C extet extra Circulum.
Ducatur etiam A D. Jam vero quia eſt * C B: C D * *Hypoth*
(vel B A) :: C D (vel A B) : B D; erunt Triangula
A B C, D B A ſimilia * propter angulum B communem, * *Pr*. 26.
& latera circa hunc proportionalia; & cùm æquiangula *Cor*. 1.
ſimul ſint, erit C = *o*; unde externus *m*, duplus interni
C *, eſt etiam duplus ipſius *o*; & *m* + *n* quadruplus * *Pr*. 7.
ipſius *o*. Atqui externus F A D eſt = *m* + *n* *, Ergo *Cor*. 7.
& ipſe quadruplus ipſius *o*. Igitur arcus B D quinquies * *Pr*. 7. *Cor*. 6.
acceptus exhaurit ſemicirculi peripheriam B D F; eſtque
idcirco arcus B D hujus peripheriæ pars quinta & totius
Circuli pars decima, ac proinde B D latus Decagoni.
Q. e. d. Nunc propius ad propoſitum. Radius A B * * Fig.
ſecetur biſariam in M: ducatur Radius Perpendicularis 94.
A C & Hypotenuſa M C, & huic fiat æqualis M N. Dico
A N eſſe latus Decagoni ❀. *Demonſtr*. Recta B N
eſt in A ſecta proportionaliter ad Totam. Ergo cùm
B A ſit Radius, erit A N latus Decagoni. *Probo Antecedens:*
Rectangulum ſub extremis B N, A N eſt æquale
Quadrato Mediæ B A; Ergo * ut B N : B A :: B A : * *Pr*.29.
A N. *Probo Antecedens*: Ducatur Perpendicularis *p*. 2.
N E = N A, & N X = M B. Compleantur Rectangula
B E, N Z: erit *primo* R = S *, 2*do* Q Quadratum * *Pr*. 11.
lineæ M B vel A M, 3*tio* Z E Quadratum lateris N M *Cor*. 1.

❀ *Obiter hìc adnotare juvat, ſi ex Perpendicularis A C puncto C ducas rectam C N, hanc eſſe Latus Pentagoni: ùt demonſtrat Clavius in L. 13. Prop. 10. Schol.*

Tab. IV. vel CM. Jam vero eſt BE = R + O + P, vel O + P + S; cui ſi addas partem Q, erit BE + Q^2 = O + P + S + Q^2 vel NM^2, vel CM^2 i. e. CA^2 + Q^2 *. * Pr. 15. Igitur ſi ex æqualibus BE + Q^2, & CA^2 + Q^2 auferas commune Q^2, reſtant æqualia BE & CA^2, vel BA^2. Ergo, ùt ſupra innuimus, eſt BN : BA :: BA : AN. proinde AN latus Decagoni. Cujus Ratio ad Radium ſic tandem inveſtigatur: Ex notis CA, AM cognoſcitur CM vel MN, ex qua ſi ſubtrahas partem MA, conſtabit reliqua NA, latus Decagoni, & ex hujus ſemiſſe Sinus 18°. *Ex hoc porro Sinus* 9°; *Sin*. 4° 30′; 2° 15′; *& Conſin*. 72°. *Sin*. 36°. *Conſin*. 54. *Sin*. 27° *&c*.

NOTA. *Indicabimus deinceps Sinus per S; Complementorum Sinus per C.*

Fig. 86. IV. *Invenire Sinum* 12°. Inter arcus AZ 30°, & BQ 36°. (quorum Sinus jam inventi ſunt) intermedius eſt arcus AB 24°. Igitur ejus Sinus invenietur per Lemma 4. Exinde Sinus 12°. S. 6°. S. 3°. S. 1° 30′. demum S. 45′, qui maxime deſiderabatur.

Fig. 87. V. *Invenire Sinus minutorum ab* 1′ *usque ad* 45′. Sit *ca* S. 45′; invenietur ex hoc & Sinu Verſo *ab* Hypotenuſa *cb*; quæ quia ſenſibiliter haud differt ab arcu *cb*, hic pro Recta haberi poteſt, quam cogita in 45 partes æquales diviſam. Concipe & ductos quoslibet Sinus intermedios, v. g. *rs*, 1′; & *di*, 2′ &c. haberi poſſunt *abc*, *ibd*, *rbs*, pro Triangulis rectilineis ſimilibus. Quare inferatur: ùt *cb* 45 partium ad notam *ca*, ita *sb* unius partis ad *sr*; ita *db* 2 partium ad *di*: & ſic deinceps. Eodem modo, ſi velis, invenies ex Sinu unius minuti, Sinus ſecundorum.

PROBLEMA II.

Sinus omnes reliquos invenire.

§. 123. Si ex inventis arcuum 60°, 45°, 36°, 24° ſinibus quæras Sinus tam dimidiorum arcuum quam Complementorum, idque, quoadusque licuerit, urgeas; provenient 120 Sinus, qui a ſibi proximis different ſolum 45 minutis; videlicet Sinus 45′. 1° 30′. 2° 15′, 3°. 3° 45′. 4° 30′ &c.

Sinus autem reliquos omnes elicies per num. præced. V. Tab.
E. G. Si deſideres Sinum 1 gradûs; datis Sinubus * IV.
ca & db ($1^{\circ}30'$ & $45'$) invenito co, od, per * Fig.
Lemm. 4, & ex his Hypotenuſam cd, quæ pro ipſo ar- 88.
cu habebitur: Unde nunc licebit inferre, ùt cd 45 partium ad co, ita ds 15 partium ad si, quam adde ipſi $ir = db$; & habebis sr Sinum 1°.

PROBLEMA III.

Tangentes & Secantes invenire. Fig. 81.

§. 124. Sit B D Sinus 40°. Erit in Triangulis ſimilibus CDB, CAG; ùt CD Sinus Complementi, ad D B; ita Radius C A ad A G Tangentem anguli C. Pariter ùt DC ad CB, ita C A ad C G Secantem anguli C. *Alios conſtruendi Canonis modos alii afferunt. Nobis abunde ſufficiunt iſthæc. Videri etiam poteſt P. Taquet Geom. Pract. L. 1.*

§. 125. SCHOLION I. Si in vulgari Sinuum Canone reſeces duas poſtremas notas ex Radio & Sinibus, habebis Sinus ſupputatos ad Radium 100 000: ac tunc ſi notæ reſectæ conficiant 50 vel ſupra, juvabit notæ antepenultimæ adjicere unitatem. Sic Sinus 54 grad. = 80901.70, mutabitur in 80901, vel melius in 80902. Si deſideres Sinum 54 gr. ad Radium 10000; reſeca ex 8090170 tres notas poſtremas; ſi ad Radium 1000, reſeca quatuor; ſi ad Radium 100, reſeca notas quinque; demum Sex pro 10. In hac notarum reſciſſione tacita quædam inſtituitur Proportionis operatio h. m. 10000000 dant 8090170, quid 1000? Reſp. 809 $\frac{170}{10000000}$.

SCHOLION II. Magno nunc eorum beneficio fruimur, qui Sinubus, Tangentibus & Secantibus Logarithmos accommodarunt. Hi quomodo inveniendi ſint, docetur in Arithmeth. §. 105. n. 4. pag. 125. Tangentium tamen & Secantium Logarithmi faciliore opera inveniuntur, nempe per ſolam inventorum Additionem & Subtractionem.

Nunc ad nobiliſſimum Tabellarum Geometricarum uſum convertamur.

PROPOSITIO XXXII.

§. 126. *In Triangulo Rectangulo* A B C, Fig. 90.
poteſt quodvis latus ſumi pro Radio. Et quidem

1mo. Si Hypotenuſam A C habeas pro Radio: erit Cathetus C B Sinus anguli A; & Ba-

Tab. IV. *Pr. 6. ſis A B (= D C) erit Conſinus Anguli A, i. e. Sinus Anguli C, qui æquatur ipſi *o* *. Demonſtratio patet, ductis arcu Quadrantis M C N, & C D parallelâ ad A B.

II. Si A B accipis pro Radio; ducto arcu B G, patebit, eſſe B C Tangentem anguli A, & A C hujus Secantem.

* Fig. 92. III. Si ſumas C B * pro Radio: erit, ducto Quadrante B D, B A Tangens anguli C, & C A ſecans.

Ex his inſtar Corollariorum Practicorum ſequentia fluunt Problemata, in quibus de Triangulis rectangulis ſolum ſermo erit; & per Crura *latera intelligemus ab Hypotenuſa diverſa.*

PROBLEMA I.

Fig. 90 vel 91. §. 127. *Datis Cruribus* A B, B C *invenire angulos acutos* A *&* C:

Per Regulam auream fiat, ùt A B ad B C, ita Radius ad Tangentem anguli A. Ex quo conſtabit & alter C.

EXEMPLUM.

Sit A B 128 pedum, B C 112 pedum. Dic: ùt 128 ad 112, ita 10000000 ad 8750000. Hunc quartum quære in Tabulis inter Tangentes; & Tangens proxime ad eum accedens, indicabit tibi angulum 41° 11′, qui eſt ipſe angulus A; & e regione ſtabit angulus Complementi, 48° 49′, i. e. angulus C. Nam ſi A B habeas pro Radio, erit B C Tangens anguli determinati A, cujus Tangentis Ratio ad ſuum Radium in Tabulis alicubi continetur. Quia vero qualis eſt Ratio inter 128 ad 112, talis eſt inter 10000000 & 8750000, habes nunc manifeſtatam Rationem inter Radium A B & Tangentem B C; quæ proinde in Tabulis quæſita dabit vel vere vel proxime Angulum A.

SCHOLION. Per Logarithmos operaturus, quæres ſemper Logarithmos laterum in Tabula Logarithmica numerorum naturalium, Logarithmos autem Sinuum, Tangentium & Secantium excerpes ex propria ſibi Tabula. In præſente Exemplo: adde in unam Summam Logarithmum numeri naturalis 112 & Radii, i.e. ex 2.0492180 + 10.0000000 fiat 12.0492180; & ex hac Summa ſubtrahatur Logarithmus numeri naturalis 128; Reſiduum dabit 9.9420080, Logarithmum Tangentis, qui in Tabula Logarithmica Tangentium quæſitus indicabit angulum 41 grad. 11 min. Tab. IV.

PROBLEMA II.

§. 128. *Datâ Hypotenuſâ* A C, *&* *Crure utrolibet* (v. g. C B) *invenire angulos acutos.* Fig. 90 vel 93.

Inferatur: ùt A C ad C B, ita Radius ad Sinum anguli A. Hujus Complementum eſt C.

Sit A C = 414; CB = 330: erit Ang. A = 52 gr. 51 min.

PROBLEMA III.

§. 129. *Datis angulis acutis* A *&* C, *&* *Hypotenuſâ* A C, *invenire Crus alterutrum v. g.* C B. Fig. 93.

Fiat: ùt Radius ad Sinum anguli A, ita A C ad C B.

PROBLEMA IV.

§. 130. *Datis angulis acutis* A *&* C *&* *crure utrolibet* (v. g. C B) *invenire crus alterum* B A. Fig. 92.

Dic: ùt Radius ad Tangentem anguli C, ita C B ad B A.

PROBLEMA V.

§. 131. *Datis Hypotenuſa* A C, *&* *crure utrolibet* (v. g. A B) *invenire crus alterum.* Fig. 90.

Quære primùm *per Probl.* 2. angulos acutos, ac deinde *per Probl.* 3. crus alterum.

PROBLEMA VI.

Tab. IV. Fig. 90 vel 93. §. 132. *Datis angulis* A & C, *& crure utrolibet* (v. g. C B) *invenire Hypotenuſam.*

Inferatur: ut Sinus anguli A, Cruri dato C B oppoſiti, ad Radium; ita Crus C B ad C A.

PROBLEMA VII.

§. 133. *Datis cruribus invenire Hypotenuſam.*

Quære primùm *per Probl.* 1. angulos acutos; inde *per Probl.* 6. Hypotenuſam.

SCHOLION I. *Hactenus cum Secantibus nihil nobis negotii fuit, quia totum ſine his commodiùs conficiebatur. Harum enim numeri ùt majores ſunt, ita calculum difficiliorem reddunt, niſi illarum Logarithmis utamur.*

Fig. 92, 93. SCHOLION II. *Si idem latus C B diverſimode ſpectetur, jam ùt Radius, jam ùt Sinus anguli A, concipietur etiam illud in diverſum partium numerum diviſum. Ut Radius ponetur continere partes* 10000000, *ùt Sinus vendicabit ſibi pro Ratione ſuæ magnitudinis ad Radium A B certam Radii partem.*

* Fig. 97. §. 134. Nota prævie pro ſequente Propoſitione. Etiam Angulis obtuſis ſuos Sinus aſſignamus. Sed advertendum, tunc pro Sinu anguli obtuſi (*o*) * accipi & intelligi Sinum anguli acuti contigui *c*, qui cum obtuſo complet 180 gradus.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 95. §. 135. *In quovis Triangulo non rectangulo* (ABC) *duo quævis latera* (A C, CB) *ſervant eam Rationem inter ſe, quam habent Sinus illorum Angulorum, quibus hæc latera opponuntur.*

DEMONSTR. Intervallo lateris minoris B C duc ex punctis B & A arcus C*s*, M*r*; deinde duc Perpendiculares C P (Sinum anguli B), & M*n* Sinum anguli A. Jam vero

in Triangulis æquiangulis A P C, A *n* M eſt ùt A C ad A M i.e. C B, ita C P ad M *n*: hoc eſt, ùt A C ad C B, ita C P Sinus anguli B oppoſiti primo lateri, ad M *n*, Sinum anguli A oppoſiti ſecundo lateri. *Q. e. d.* Tab. IV.

Eadem Demonſtratio etiam Triangulis obtusangulis accommodatur, ita ut ſit latus * B C angulo obtuſo oppoſitum ad alterutrum reliquorum, v. g. ad C A, uti Sinus anguli *o* ad Sinum anguli B. Nam ſi ducas intervallo A C ex B & A arcus, & Perpendicularem C P, Sinum anguli *c* vel *o* *, item M *n*, Sinum anguli B; erit ùt B C ad B M i.e. C A, ita C P ad M *n*. *Q. e. d.* *Fig. 97. *§. 134.

Ex his ſequentia derivantur Problemata circa Triangula non rectangula.

PROBLEMA I.

§. 136. *Dato latere* A B *& angulis ad extremitatem* A *&* B *invenire latus alterutrum* B C *vel* A C. Fig. 96.

Quæſito prius angulo C *, fiat: Ut Sinus anguli C ad Sinum anguli A, ita A B ad B C. * Pr. 7. Cor. 2.

Hoc Problema frequentiſſime occurrit in Praxi.

PROBLEMA II.

§. 137. *Datis Trianguli* A B C *baſi* (A B) *& alterutro laterum* (v. g. B C) *unoque angulorum* (B) *ad baſin, a datis lateribus incluſo, invenire Altitudinem vel Perpendiculum* C P. Fig. 96.

Imo. Si Triangulum ſit *acutangulum*, ut Perpendicularis neceſſario cadat intra baſin, dices: * ùt Radius ad Sinum anguli B, ita B C ad C P. IIdo. (Fig. 97.) Si A B C ſit *obtuſangulum*, ut adeo Perpendiculum C P cadat extra Baſin. Dices pariter: ùt Radius ad Sinum anguli contigui *c*, ita A C ad C P. * Pr. 32. Probl. 3.

Utrum autem angulorum aliquis obtuſus ſit, aliunde conſtare debet.

Tab. IV. Fig. 96.

PROBLEMA III.

§. 138. *Cognitis duobus Trianguli lateribus* AB, BC, *& angulo intercepto* B, *invenire tum latus tertium* CA, *tum angulos reliquos*.

Imo. Pro *Acutangulo* ABC, quære primùm *per Probl.* 2. Altitudinem CP, & rectanguli BPC acutum *s* *. Deinde fiat: ùt Radius ad Sin. anguli *s*, ita CB ad BP, quæ ſubtracta ex tota AB prodit partem AP. Ex notis autem Trianguli APC lateribus AP, PC, notus fit angulus A *, inde vero eruitur *per Probl.* 1. latus AC; & *per Prop.* 7. *Cor.* 2. angulus *i*, unde etiam conſtabit *i* † *s*, i. e. C.

* Pr. 7. Cor. 2.

* Pr. 32. Probl. 1.

IIdo. Circa *Obtusangulum* ABC (Fig. 97) in quo ſupponuntur cognita AB, AC, cum intercepto obtuſo *o*, pari modo proceditur; niſi quod poſt inventum *s* & rectam AP, hæc adjicienda ſit ipſi AB, ut conſtet tota PB. Ex notis autem CP, PB elicitur latus CB*; item angulus B *, & *i* † *s*, demum *i*.

* Pr. 32. Probl. 7. * Pr. 32. Probl. 1.

Problema hoc in Praxi frequentiſſimum alia breviore via, quam hîc ſubnecto, reſolvi poteſt. Vide Fig. 83.

§. 139. ALITER. *Datis duobus lateribus* CB (216 *pedum*) *&* BA (112 *ped.*) *& angulo intercepto* B (113 *grad.*) *invenire reliquos angulos & latus reliquum*. Dic: ùt laterum datorum Summa (328 *ped.*) ad eorundem differentiam (104 *pedum*, *quæ eſt reſiduum poſt ſubtractionem minoris* BA *ex majore* CB); ita Tangens dimidiæ Summæ incognitorum angulorum, *a* & *c* (*i. e. ita Tangens* 33°30′ = 6618856) ad Tangentem ſemidifferentiæ ignotorum angulorum (*nempe ad* 2101255, *Tangentem anguli* 11°52′). Hæc Semidifferentia, videl. 11°52′, addita ad dimidiam Summam angulorum incognitorum (ſcil. ad 3°330′) ſiſtit angulum majorem *a*

(45°22′). Eadem ſubtracta ex dimidio illius Summæ præbet angulum minorem *c* (21°38′). Inde autem eruitur latus A C, *per Probl.* 1. Tab. IV.

Demonſtrationi præmitto hoc LEMMA. Si duæ quantitates homogeneæ * A B, B C, conjungantur in unam Summam A C, & concipiatur A *m* ⊐ B C; erit *mn* differentia partium A B, B C *. Jam Semidifferentia *dn* addita minori quantitati B C, efficit (*d* C) dimidium Summæ. Eadem hæc Semidifferentia *d n* addita dimidio Summæ (i.e. ipſi A *d*) producit quantitatem majorem A B. Viciſſim, ſi *dn* additum Semiſummæ A *d* producit quantitatem majorem A B; erit *d n* Semidifferentia. Quæ omnia, inſpectâ Figurâ, ſunt ex ſeſe manifeſta. Sequitur nunc *Fig. 82. * Arith. §. 13.

DEMONSTRATIO. Intervallo majoris lateris B C duc Circulum. Producatur C A in *s*, & A B usque in T & D. Ducantur etiam Recta D C, & hujus intervallo ex D & C arcus D G, C G; demum D *t* Perpendicularis ipſi D C. Quo facto, erit T A Summa laterum C B, B A; A D horum Differentia; angulus D C T, utpote in Semicirculo, Rectus, adeoque C T Tangens anguli *d*, & D *t* Tangens anguli D C A. His poſitis, eſt angulus externus *s* æqualis ipſis *a* † *c*, duplus autem anguli *d* *: unde erit *d* incognitorum *a* & *c* Semiſumma, cognoſcenda per Prop. 7. Cor. 2. Sed D C A additus huic Semiſummæ *d* adæquat externum * & majorem *a*; ergo D C A eſt Semidifferentia angulorum *a* & *c* *. Porro Triangula C T A, *t* D A ſunt æquiangula (*nam æquantur anguli verticales ad* A *; *&* T D *incidens in Perpendiculares adeoque parallelas* D *t*, C T, *facit angulos* T *&* t D A *æquales* *. *Ergo.*) Igitur ** eſt A T : A D :: T C : D *t*. i.e. ut Summa laterum A B, B C, ad horum Differentiam, ita Tangens Semiſummæ (*d*) incognitorum angulorum ad Tangentem Semidifferentiæ (D C A) eorundem angulorum. *Quod erat primum.* Porro eſt D C A † *d* ⊐ *a*: Ergo cognitis nunc angulis *a*, B, *c*, cognoſcetur latus A C *. *Quod erat alterum.* * Pr. 7. Cor. 7. * Pr. 7. Cor. 6. * Lem. præced. * Pr. 1. * Pr. 6. p. 1. ** Pr. 25. * Probl. 1.

§. 140. SCHOLION. Etiam in Triangulis rectangulis duo quævis latera ſunt ad ſe, uti Sinus angulorum, quibus opponun-

Tab. IV. tur. Id quod in Propoſitione 32. implicite demonſtravimus. Cæterum ſolutionem unius alteriusve Problematis huc pertinentis (e. g. Datis 2 lateribus & angulo ab iis non comprehenſo, invenire reliqua) tuomet Marte ex Propos. 33. deduces.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig. 84. §. 141. *Si in Triangulo non rectangulo* (A B C) *intervallo lateris majoris* C B *ducatur circulus, & producatur latus* A C *ad Peripheriæ puncta* D *&* N, *Baſis vero* B A *in* M: *habebit ſe baſis* A B *ad ſummam reliquorum laterum* A C, C B, *vel ad* A N, *ſicut laterum iſtorum Differentia* A D *ad* A M.

DEMONSTR. Ductis M D, N B, exurgunt Triangula æquiangula A B N & A D M (*Nam æquantur anguli verticales ad* A, *item* M *&* N, *utpote inſiſtentes eidem arcui* D B, *igitur & reliqui.*) Quare ùt A B ad A N i.e. A C † C B, ita A D ad A M. *Q. e. d.* Inde deducitur;

§. 142. COROLLARIUM Practicum. *Datis tribus Trianguli lateribus* A B (1277. *ped.*), B C (865. *ped.*), C A (632 *ped.*), *invenire angulos.* Fiat: ùt Baſis A B ad ſummam reliquorum laterum (1497), ita horum Differentia (233) ad lineam A M = 273 ped. Hæc A M addita Baſi efficit Totam M B, quæ biſecatur a perpendiculo C P *: quare A M ablata ex M P prodit partem A P (502 *ped.*) Notis igitur A P, A C, cognoſcetur & angulus A *, ſimiliter ex P B, B C, angulus B, atque ex his tertius C.

* Pr. 17. p. 1.

* Pr. 32. Probl. 2.

Hactenus oſtenſum eſt, quomodo ex datis Trianguli 3 lateribus inveniri poſſint ipſi anguli, aut ex datis duobus lateribus & uno angulorum, aut ex uno latere & a angulis datis reperiantur reliqua. At ex datis 3 angulis nequeunt aſſignari latera, propterea quod ex angulorum magnitudine minime determinetur particularium laterum quantitas. Generice tamen, ex angulorum magnitudine, laterum proportio determinari poteſt, ùt conſtat ex §. 135. 140.

CAPUT II.

Tab. IV.

Problemata ex Euthymetria.

Antequam ad reſolutionem ſubſequentium Problematum deſcendamus, Inſtrumentorum nonnullorum apparatum aliqualem, fabricam & uſum indicabo. Hæc quidem melius diſcuntur ipſa Organorum inſpectione, quam longa eorundem deſcriptione. In gratiam tamen illorum, qui forte Magiſtro carent, qui hæc oculis exhibeat, ſtrictim quædam explico.

§. 143. *Parentur 6. 8. vel 12. baculi, ſinguli longi pedes 5 vel 6, ſpiſſi pollicem vel paulo ultra, teretes, infra cuſpidibus ferreis armati, colore albi.*

§. 144. *Paretur* Catena, *compoſita ex filis ferreis aut oricbalcinis, tanquam totidem membris, pedem unum longis, habentibus craſſitiem calami vulgaris ſcriptorii. Catena ſit longa pedes 10. 30. vel 50. Catena 3 Decempedis longior, gravitate ſua efficit, ut vix horizontaliter tendi poſſit.* Fig. 107.

§. 145. *Deſcriptæ mox Catenæ Metatoriæ minus fide ſubſtituitur funiculus; quòd is tum pro diverſa trahentium vi, tum pro mutabili ſiccitatis & humiditatis gradu ad inæqualem longitudinem extendatur. Aliàs tamen funis conducet ad lineas rectas deſignandas, ad Perpendiculares, ad Circulos aut Arcus, ad Triangula in Campo deſcribenda; ubi ſæpe circini domeſtici vices ſupplebit.*

§. 146. Pertica, *vel* Decempeda *adhibetur ad longitudines vel menſurandas, vel diſtribuendas in certum partium numerum. Decempedæ pes unus extremus ſit in 10 pollices diviſus. Præſtat, duas ad manum eſſe Decempedas, ut alternatim, unâ per ſolum extenſâ & quieſcente, altera levari poſſit, & quieſcenti in directum apponi. Nec oberit, ſi Decempedarum ſitum dirigat funiculus recta extenſus.*

De partibus Decempedæ decimalibus dictum fuit in Arithmet. Cap. 3. Art. 2. quem locum legendo repete.

Tab. IV. Fig. 98. §. 147. Quadratum Geometricum *conſtruitur, ſi ſuper ſolidæ materiæ planum deſcribas (per* §. 157) *Quadratum* A B D E; *cujus latera* E D, D B, *divides in partes æquales* 100, *vel, per* §. 159, *in* 1000. *Fiat etiam Regula Dioptrica* M N; *cujus pars* C O *ſit æqualis lateri* E D *& in totidem partes diviſa; quam diviſionem ulterius protendes ex* O *in* N, *faciendo ipſam* C N *æqualem Diagonali* A D. *Perforentur ſubtiliter Regulæ & Quadrati puncta* C *&* A: *ac Regula terete claviculo affigatur Quadrato in* A, *ſic tamen, ut maneat in orbem volubilis. Habeat Regula duas pinnulas Dioptricas* M *&* N, *in quibus ducantur lineæ* M r, N s, *perpendiculares ad Planum Regulæ & ad rectam* M N; *& per utramque perpendicularem incidantur crenæ aut foramina. Juvat Quadratum etiam inſtructum eſſe pinnulis lateralibus, ſed ſtabilibus, quæ reſpondeant lateribus* A B, A E: *quarum vices ſubire aliàs deberet Regula* M N, *imponenda lateribus* A B *vel* A E. *Radius vel linea viſûs, quæ per crenas aut foramina tranſire concipitur,* Linea optica *nobis dicetur; & in praxi pro ipſa Regulæ linea* M N, *vel pro Quadrati lateribus* A B, A E, *habebitur.*

Fig. 99. §. 148. *Geometriæ Practicæ plurimum ſervit* Semicirculus, *habens unius vel dimidii pedis Diametrum; in cujus centro pariter firmatur Regula Dioptrica in orbem verſatilis. Diametro autem* A B, *vel alteri lineæ vicinæ, cum Diametro parallelæ, inſideant itidem pinnæ ſtabiles.*

Totus autem Circulus X *ex annulo* a *penſilis, vocatur* Aſtrolabium, Fig. 100. *At quia, quod Circulus præſtat, id omne Semicirculus valet efficere; etiam huic Aſtrolabii nomen vulgo nunc adhæret. Radius Aſtrolabii ſit minimum 6. digitorum. Aſtrolabium & ſimilia Inſtrumenta, capiendis Angulis deſtinata, dicuntur* Goniometrica.

§. 149. Menſula Prætoriana, *ab Inventore* Prætore *ſic dicta, eſt Planum quadratum, chartâ candidâ ſtratum, cujus latus unum continet unum vel ſeſqui pedem. Etiam huic ſua competit Regula Dioptrica,* Fig. 102. *Proderit, huic Regulæ ſcalam unam vel plures diverſæ longitudinis inſcripſiſſe. Studioſe autem curandum circa quasvis Regulas, ut Dioptræ ſint cum latere Regulæ exacte paral-*

lelæ: id quod conſtabit, ſi Regulâ vel ad ductam in Menſula immota lineam, vel ad unum eundemque Aſtrolabii fixi gradum applicatâ, collimando in punctum aliquod fixum ſat diſtans, Dioptræ illud ſemper attingant, ſive pinnulam A *ſive* B *oculo admoveas.* Tab. IV.

§. 150. *Ad praxes quandoque aliquas apprime conducit Regula Dioptrica, cui firme adhæret* Pyxis Magnetica, *quæ eſt capſa, cujus cavo rotundo inſcriptus eſt circulus in ſuos gradus diſtributus, cujus centro inſiſtit Stylus bene acuminatus, & huic acus Magnetica.* Fig. 103.

§. 151. *Quadratum, Aſtrolabium, Quadrans, Menſula, ſimiliaque organa commode infiguntur columellæ* c x Fig. 101, *quæ deſinit in globum, qui intra concavum geminum corticem, cochleâ* a *conſtringendum, quaquaverſum mobilis conſiſtit. Corticem excipit Stylus* s, *qui columnæ* x z *immittitur. Hæc demum columna geſtatur a pedibus* Z R, Z S, Z T, *pro lubitu divaricandis, atque ope cochlearum ad* Z *firmandis.*

§. 152. Circinus Proportionum * *conſtat 2 Regulis, circa claviculum* C *inſtar circini mobilibus, ita ut complicatæ unum efficiant Planum parallelogrammum. Ex claviculi centro* C *duc duas rectas æquales* C M, C N; *utramque divide in partes* 100 *vel* 200, *vel ope ſcalæ*, §. 158, *in* 1000. *Adſcribantur punctis numeri* 5. 10. 5. 20. 5. 30 *&c. Utraque harum linearum vocetur* LINEA ARITHMETICA, *vel* Linea æqualium partium. * Tab. V. Fig. 118.

Quomodo & cui uſui aliæ nonnullæ lineæ inſcribendæ ſint, infra ſuis locis docebimus. Organon hoc utiliſſimum eſt ad praxes plurimas. Sed cùm raro ab Artificibus ea, qua par eſt, diligentia paretur (quod vitium & cæteris Inſtrumentis Mathematicis familiare eſt) mallem illi propriâ acribiâ lineas inſculpere, aut ſaltem harum partes punctis determinare. Circini hujus uſum largius expoſuerunt P. De Chales, Geom. Pract. L. 4, Bion, & Mich. Scheffelt in Inſtrum. Proport. Ejus inventionem arrogaverat ſibi Galilæus A. 1607. cui litem propterea intenderunt Capra & Byrgius.

Deſcriptionem organorum iſtorum prolixius proſequuntur Nicolaus Bion in Officina Inſtrumentorum (Mathematiſche Werckſchuhle) *Leupoldus in Theatro Machinar. Pentherus in Praxi Geometrica, quem poſtremum librum impenſe commendamus Geometriæ Practicæ cultoribus. Huic utiliter ſociabunt Zollmanni Geodæſiam.*

Tab. IV.

ARTICULUS I.

De Lineis Rectis.

Varia Problemata huc pertinentia ſparſim jam ſolvimus in Parte I. Hujus generis erant:

I. Lineam bifariam ſecare. §. 37.

II. Lineam Perpendicularem ducere. §. 38. 39.

III. Lineam alteri parallelam ducere. §. 44.

IV. Triangulum Iſoſceles aut Æquilaterum conſtruere. §. 23.

V. Tangentem ad Circulum ducere. *His nunc alia addamus.*

Fig. 106.

PROBLEMA I.

§. 153. *Lineam rectam in campo ducere ex* A *in* B.

Fixis baculis A & B, oculo vel per foramen Diametrale proſpiciente, vel eodem aliquot paſſus ab A remoto & ita directo, ut baculus A tegat baculum B, ſocius tibi alium baculum figat in C ita, ut is per obſtantem A pariter oculo ſubducatur; eodem modo figatur baculus D. &c. Tandem baculi omnes uni Lineæ rectæ inſiſtent.

Lineam A C produces in directum, ſi oculo ad A conſiſtente, modo tradito figatur baculus D, B &c. Poſſunt etiam ope Regulæ Dioptricæ, cujus dioptræ ex A verſus B diriguntur, baculi figi intra lineam opticam AB.

Fig. 108.

PROBLEMA II.

§. 154. *Ducere in campo lineam* P L *ad* Q P *Perpendicularem.*

Centro

Centro Aſtrolabii vel Quadrati ſuper punctum P ſtatuto, & Inſtrumenti latere *rs* in Q directo, faciat Regula Dioptrica angulum Rectum *r*PL: ac intra lineam opticam PL baculus alicubi figatur. Erit PL perpendicularis ad PQ. Tab. IV.

§. 155. SCHOLION. Lineæ Campeſtris extrema P & Q notantur ſæpe baculis, qui in Geometria Practica Punctorum vices obeunt: imo nonnunquam arbores, turres, pagi & oppida in diſtantiis valde magnis Punctorum munere funguntur. Jam vero ut diſcas, quomodo hujusmodi Puncto campeſtri P imponendum ſit Aſtrolabii Centrum; fac, ut infra hoc centrum pendeat ponduſculum perpendiculariter imminens foramini, cui baculi cuſpis inſerta ante fuerat. Inde ſimul patet, quomodo poſt ſtatutum alicubi Inſtrumentum, v. g. in P, relinquendum ſit Centri veſtigium aut punctum: nempe ponduſculo pendulo & humum prope contingente, notetur locus contactui proximus, & huic baculus perpendiculariter infigatur.

PROBLEMA III.

§. 156. *Lineæ* PQ *aliam* LM *parallelam in Campo ducere.* Fig. 108.

Erige in P & Q duas Perpendiculares æquales PL, QM. Recta LM erit ad PQ parallela *. *§. 19.

VEL (Fig. 90.) Si cupias Lineæ AB ducere parallelam CD; duc obliquam AC, & angulo BAC fac, ad C, æqualem DCA; erit CD parallela, *per Prop. 6. p. 2.*

PROBLEMA IV.

§. 157. *Rectangulum, & Parallelogrammum in Plano delineare.* Tab. V. Fig. 109. Tab. V.

Ductâ AB, & Perpendiculari AD, deſcribe intervallo AD ex B arcum, & intervallo AB ex D alterum, qui priorem ſecet in C. Rectæ BC & CD complebunt Rectangulum.

Tab. V. *§. 146. * Si Perpendicularem AD feceris ipſi AB æqualem, dabit tradita methodus Quadratum. Pariter (*Fig*. 110.) datâ AB & obliquâ AD deſcribes Rhombos, Rhomboides, & quævis Parallelogramma.

* Fig. 109. * *Pr.* 5. DEMONSTRATIO. * I^mo^. Ductâ Diagonali BD habes duo Triangula æqualia *, in quibus æquantur *primo* anguli A & C, unde ut A ita & C Rectus eſt. *Secundo* æquantur congrui *r* & *s*; quare AB & DC parallelæ ſunt; * §. 42. proinde & anguli ADC, CBA * Recti. Ergo BD Rectangulum eſt. II^do^. Ex ſimili ratiocinio parallela ſunt (*in Fig*. 110.) latera AB, DC; item AD, BC; atque hinc ABCD parallelogrammum.

PROBLEMA V.

§. 158. *Scalam Geometricam conſtruere & explicare*. Tab. III. Fig. 71.

Linea AZ dividatur in 10 partes æquales (quarum nos, ob ſpatii anguſtias ſolum quinque exhibemus) AE, EG, GI &c. Erigatur Perpendicularis AD, & dividatur in 10 partes; talis etiam erigatur in Z; cui ipſam BC interim ſubſtitutam cogita. Ducantur cum AZ parallelæ DX; 9, 9; 8, 8; 7, 7 &c. II. Erigantur & Perpendiculares EF, GH, IK &c. Demum partes AE, DF dividantur in 10 partes æquales, ducanturque transverſæ E*o*; 10, 20; 20, 30; &c. Erit factum.

Demonſtratur uſus hujus ſcalæ. Tota AZ eſt æquivalenter diviſa in 1000 partes, & AB

in 500: licebitque inde accipere tot partes decimas, centeſimas, milleſimas, quot deſideraveris. De decimis & centeſimis patet in ipſa linea AZ, atque ex dictis in Arithmet. §. 68, quem locum recole. Nam ſi AZ ponatur = 1^{0}, erit AE = $1'$, & AG = $2'$ &c. Item AE = $10''$; AG = $20''$ &c. & A*q* = $1''$. Reſtat, ut, quomodo partes milleſimæ capiendæ, explicetur. Equidem ſi unaquæque centeſimarum, qualis eſt FO, vel A*q*, vel E*x*, ſubdivideretur in 10 alias partes; hæ utique milleſimas præberent: verum quia hæc ſubdiviſio in praxi difficilis; partes iſtæ commodius capiuntur ope transverſarum. Dico enim, *am* eſſe unam milleſimam ſeu $1'''$; *bn* eſſe $2'''$; *cs* $3'''$; *br*, $8'''$ &c. DEMONSTR. Triangula EFO, E*br*, E*cs*, E*bn*, E*am* &c. ſunt æquiangula. Ergo erit ut EF ad E*b*, ita FO ad *br*; ſed EF eſt ad E*b*, ut 10 ad 8; ergo etiam ſi in FO concipias 10 partes milleſimas, continebit *br* talium octo; & *cs*, tres; *bn*, duas &c. Tab. V.

Unde ſi petas ex Scala partes $4'\ 6''\ 3'''$; dabit iſtas intervallum *uv*: & L*x* dabit $310'''$: & *bk* $18'''$. II. Si vero ipſam AE accipias pro Integro, dabit A*q* unam decimam, & *cs* tres centeſimas. III. Si in lineis AD, BC, partes A 1; 1, 2; 2, 3; &c. paulo majores fiant, ut commode in 10 alias ſubdividi queant, atque per puncta ſectionum pariter ducantur parallelæ cum AZ. Habebis totam AZ æquivalenter in 10 000 partes diviſam.

§. 159. SCHOLION. *Patet, quomodo Quadrati latera bina contigua E D, D B (Tab. IV. Fig. 98) commode dividi queant in partes* 1000; *confer Figuram* 104, *in qua exhibetur fragmentum duntaxat* E l m n, *Figuræ* 98. *Nam poſtquam ductæ ſunt verſus centrum A rectæ* ab, cd *&c*, *ducendæ ſunt inter* E n, *pa-*

Tab. V. *rallelæ æqualiter diſtantes, deinde obliquæ* Eb, ad, ef *&c. per quas ipſæ* Ea, ae *&c. æquivalenter dividuntur in partes* 10.

*Tab. IV. Fig. 105. *Pari ratione Circuli gradus unus* ab * *per transverſam rectam* ac *dividi poteſt in partes minores utcunque æquales, ita ut hujus adminiculo capi etiam poſſint minuta prima. Ut autem partes capias omnimode æquales, deberet* ac *eſſe linea curva; quæ quomodo deſcribenda ſit, docent* Bion, *&* Leutman *in* Geometria repetita *&c.*

PROBLEMA VI.

Fig. 111. §. 160. *Lineam* AB *dividere in quotcunque partes, v.g. in* 5.

Duc ad angulum acutum A indefinitam AM, & huic parallelam BN. Arbitrariâ, commodâ tamen circini aperturâ cape in AM, & BN, 5 partes æquales. Si jam ducas per puncta diviſionum transverſas em, fn, gp, hq; hæ ſecabunt ipſam AB in 5 partes æquales.

DEMONSTR. Ductâ Diagonali en, æquantur anguli alterni o, i *, atque hinc etiam Triangula enm, nef, & horum latera em; fn *, parallela inter ſe **. Similiter oſtendo parallela eſſe fn, gp; gp, hq &c. proinde iſthæc dividunt Trianguli ANB latus AB in totidem partes æquales, quot aſſumptæ erant in BN *.

* Pr. 6. p. 1.
* Pr. 2.
** Pr. 6. p. 2.
* Pr. 10.

Fig. 112. §. 161. ALITER divides AB in partes æquales v.g. 4. Si infra vel ſupra datam AB ducas aliam ab ipſi AB parallelam; quam arbitrariâ, aptâ tamen circini aperturâ divides quadrifariam, & ex a & b duces per puncta A & B lineas concurrentes in C, & ex C alias Ce, Cd, Cf, quæ ſecabunt ipſam AB quadrifariam. Nam ut Ce : Cm :: ea : mA, per Propoſ. 25. & ut Ce : Cm :: ed, i. e. ea : mn. Ergo * æquantur mA, mn, & ex pari ratione mn, no; no, oB.

* §. 89. Ax. 3.

* Fig. 118. §. 162. ALITER ope *Circini Proportionalis* divides lineam AB * in partes v. g. 4. æquales; ſi in Linea

Arithmetica utrimque eligas *directe* (i. e. ex centro C deorſum, verſus M & N, numerando) portionem aliquam 4 partium, qualis eſt portio C 40, conſtans ex partibus quater 10. Deinde lineæ AB intervallum Circino manuali captum extende *tranſverſim* ex puncto 40 in oppoſitum 40; tunc enim relicta hac Circini apertura dabit tranſverſa *r s* (inter 10 & 10) partem quartam; tranſverſa inter puncta 20 & 20, duas quartas; & inter 30, 30, tres quartas. *Demonſtratio* conficitur ex Propoſit. 25. Eodem pacto divides lineam AB in 7 partes, ſi ipſam *tranſverſim* extendas inter 49 & 49: tunc namque tranſverſa inter 7 & 7 dabit $\frac{1}{7}$, inter 14 & 14 dabit $\frac{2}{7}$. &c. Ex quo colligis, haberi poſſe in hoc Circino lineæ AB quotcunque partes, v.g. $\frac{25}{40}$; ſi nimirum illam tranſverſim ponas inter 40 & 40, ac Circino hac in apertura relicto, capias intervallum tranſverſum ex 25 in 25, quod dabit ipſius AB $\frac{25}{40}$. Tab. V.

Quidam pro diviſione cujusvis lineæ rectæ inſcribunt Circino Proportionum peculiarem Lineam. At mihi ſufficeret Linea Arithmetica cum methodo mox tradita: eadem enim præſtat.

PROBLEMA VII.

§. 163. *Lineam* AB *ſecare in quotcunque partes* (*e.g. duas*, Bm, mA) *ſed proportionales lineæ* BC *partibus*, Bn, nC. E. VI. 10. Fig. 113.

Junctis ad angulum B datis lineis, duc CA, & huic parallelam *nm* (vel ſi opus ſit, plures parallelas) erit ùt B*n*: *n*C :: B*m* : *m* A*.

* Prop. 24.

PROBLEMA VIII.

§. 164. *Datis duabus rectis* mB, Bn, *tertiam proportionalem invenire*. E. VI. 11. Fig. 113.

Datas *m*B, B*n*, junge ad aliquem angulum B: & in producta *m*B fac BA = B*n*. Duc *mn*, & huic parallelam AC: erit BC tertia proportionalis major. Nam *m*B:B*n*::AB i.e.

Tab. V. $Bn : BC$ *. Datis autem BC, BA, ſumatur $Bn = BA$; ducanturque parallelæ CA, *nm*;
* Pr. 24. Cor. erit B*m* tertia proportionalis minor.

* Fig. 118. §. 165. ALITER *. Datis CA, AB, invenies tertiam proportionalem in *Circino Proportionum*; ſi accipias *directe* ipſam CA, & ex A *transverſim* in B extendas alteram AB. Si jam Circino ſic aperto eandem AB ponas *directe* ex C in *m*; transverſa inde *mn* dabit quæſitam. *Demonſtr*. ut CA ad AB, ita AB i.e. C*m* ad *mn*.

§. 166. ALITER *per Scalam*. Contineat CA partes 367''', & altera AB 203'''. Numeri 203 Quadratum divide per primum 367; quotus 112''' $\frac{105}{367}$ oſtendet, lineam totidem partium ex Scala deſumptarum eſſe tertiam proportionalem *.

* Arithm. Pr. 8. Cor. 2.

PROBLEMA IX.

E. VI. 12. §. 167. *Datis tribus* BA, BC, BP *invenire quartam proportionalem*. Fig. 117.

Tribus datis ad angulum junctis & diſpoſitis, ut Figura 117. monſtrat, ducantur parallelæ AC, & PQ, in quam incidat producta BC; erit BQ quæſita. Nam $BA : BC :: BP : BQ$.

Quomodo aliter invenienda 4ta Proportionalis ſubſidio Circini Proport. aut arithmetice in Scala, ſatis patet ex §. 166. In Fig. 118. rectæ C*r*, *rs*, C*m*, *mn*, ſunt 4 proportionales.

PROBLEMA X.

§. 168. *Datis rectis* AP, PB, *invenire*
E. VI. 13. *Mediam Proportionalem*. Tab. III. Fig. 72.

Conjunge datas rectas in unam AB, quam biſeca in *e*; ex quo ceu centro duces ſemicirculum; & Perpendicularis PC ad peripheriam terminata, erit Media Proportionalis, *per Propos*. 27. *Cor*.

ARTICULUS II. Tab. V.

De Lineis Circularibus & Polygonorum.

§. 169. *Euthymetria, ſiquidem vim nominis ſpectes, rectarum dimenſionem conſiderat; at in ſenſu a Mathematicis recepto, etiam curvas admittit. Ad quas prius quam accedamus, novam Circino Proportionum Lineam inſcribamus, cui nomen* LINEA CHORDARUM. *Solet hæc delineari in oppoſito Lineæ Arithmeticæ plano, ductis è centro C* lineis CM, CN. Sic autem deſcribitur. Divide Semicirculum, cujus Diameter* o r *æqualis ſit lineæ C M, in* 180 *gradus, & duc ex* o *chordas graduum* 1. 2. 3. *&c. Has ipſas Chordas deinde* directe *transferes in utramque lineam CM, CN, gradus ſaltem præcipuos adſcriptis numeris notans.* *Fig. 114. & 119. n. 1.

*Vel *ex Scala* 10000 *partium ſume partes* 87 *pro chorda gradûs unius,* 175 *partes pro chorda* 2 *graduum; & ſic deinceps reliquas, quas ſubjecta Tabella monſtrat.*

Gr.	Chord.	Gr.	Chord.	Gr.	Chord.	Gr.	Chord.
1	87	24	2079	47	3987	70	4736
2	175	25	2164	48	4067	71	5807
3	262	26	2250	49	4147	72	5878
4	349	27	2334	50	4226	73	5948
5	436	28	2419	51	4305	74	6018
6	523	29	2504	52	5384	75	6088
7	610	30	2588	53	4462	76	6157
8	698	31	2672	54	4540	77	6225
9	785	32	2756	55	4617	78	6293
10	872	33	2840	56	4695	79	6361
11	958	34	2924	57	4772	80	6428
12	1045	35	3007	58	4848	81	6494
13	1132	36	3090	59	4924	82	6561
14	1219	37	3173	60	5000	83	6626
15	1305	38	3256	61	5075	84	6691
16	1392	39	3338	62	5150	85	6756
17	1478	40	3420	63	5225	86	6820
18	1564	41	3502	64	5299	87	6884
19	1650	42	3584	65	5373	88	6947
20	1736	43	3665	66	5446	89	7009
21	1822	44	3746	67	5519	90	7071
22	1908	45	3827	68	5592		
23	1994	46	3907	69	5664		

Tab. V. *Hæ chordæ e Tabulis Sinuum ſunt ea ratione excerptæ; ut pro chorda unius gradûs ſumatur Sinus arcûs ſubdupli, ſcil. arcûs 30′; pro chorda 2 graduum ſumatur Sinus 1°. & ſic porro. Unde liquet, quomodo Tabula ad 180° extendenda.* * Fig. 116. *Fundamentum hujus tale accipe. Si Circuli* * *cujusdam Radius* or *ſit* 10000 *partium; erit, ex Tabulis Sinuum, Sinus* 30′ = 87, *Sinus* 1° = 174, *Sinus* 2° = 349 *&c. Sed ponimus nos Circulum, cujus Radius* om *ſit* 5000, *ſubduplus nempe prioris: ergo & chordæ & Sinus, hujus Circuli, ſubdupli erunt illorum prioris, per* Propoſit. 25: *Nam quia eſt ut* or *ad* om, *ita* rl *ad* mx; *erit* rl *dupla chordæ* mx. *Unde ſi in primo Circulo,* rl *ſit chorda* 1°, *erit hujus dimidium* (rn) *Sinus* 30 *minutorum, at æqualis chordæ* mx *ſecundi Circuli. Atque ita de aliis.*

Hæc eadem Tabula ſerviet, ut ex Scala 1000 *partium ſcias chordas deſumere, ſi nimirum a numeris chordarum notam poſtremam reſeces.*

PROBLEMA I.

Fig. 119. n. 2. §. 170. *Semicirculum in* 180 *gradus dividere.*

Ducta Diametro & peripheriâ, circini aperturam eandem ter circumage per Peripheriam, & trifariam diviſeris iſtam *. Harum partium quamvis ſeca in duas alias, & iſtarum unamquamque trifariam: harum ſingulas rurſus in duas, ac demum harum quamque in 5 partes. Juxta hunc Verſum: In tres, in binas, tres, binas, quinque ſecato.

* *Per Pr.* 23.

Patet exinde, quomodo alter Semicirculus, atque hinc totus Circulus in 360° dividendus.

Eandem Semicirculi diviſionem in gradus aliquot, vel omnes, perficies beneficio Lineæ Chordarum Circino Proport. inſcriptæ. Nam ſi Chorda 60 graduum, nempe C 60 *, ſumatur pro Radio, eoque Peripheria deſcribatur; reliquæ Chordæ diſtribuent Peripheriam in ſuos gradus.

* Fig. 114.

Quomodo autem Linea Chordarum ſervire poſſit ad Circulos majores minoresve deſcribendos, ex ſequentibus colligetur. Tab. V.

Proderit conſtruere ſibi Semicirculum in ſuos gradus rite diviſum, e cujus centro complures Semicirculi concentrici deſcribantur; ac tum a graduum punctis Radii ad centrum ducantur. Quo pacto obtinebis complures diverſæ magnitudinis Semicirculos, uſui ſuo tempore futuros. Fig. 119.

PROBLEMA II.

§. 171. *Explorare, quot graduum ſit datus Angulus* ABD. Fig. 115.

Imo. Is exploratur per *Transportatorium*, de quo pag. 6. §. 18. IIdo. Per *Semicirculum* mox indicatum, concentricos plures complectentem. Nam ſi ex concentricis iſtis eligas unum aliquem, ejusdemque Radio deſcribas ex B arcum AD; tunc interceptæ chordæ AD longitudo translata in priùs electum Semicirculum, oſtendet, quot gradus ſubtendat. IIItio. * Per *Circinum Proport*. explorabis angulum ABD hoc modo. Latus AB, vel hujus partem, v. g. B*a*, Circino vulgari interceptam pone in Linea Chordarum *directe* ex C in *a*, bene notando punctum *a*. Deinde Circino cape anguli *a* B *d* chordam *ad*, eamque ex puncto *a* colloca *tranſverſim* in oppoſitum *δ*. Circino ſic relicto, cape in eo transverſam latitudinem inter 60 & 60, eâque *directe* poſitâ, explora, quodnam Chordæ punctum attingat extremitas ejus *e*. Attingat *e* punctum 63°; dico totidem graduum eſſe quæſitum angulum. Nam in Quadrante, cujus Radius ſit CR = 5000, eſt C*e* vel RS, chorda 63° *. Sed

* Fig. 114 & 115.

* §. 169.

Tab. V. ut CR : RS :: Cα : $\alpha\delta$. Ergo etiam, ſi Cα = Bα ſumatur pro Radio; erit $\alpha\delta$ i. e. *ad* Chorda 63°.

PROBLEMA III.

§. 172. *In Rectæ AB puncto* B *angulum quemcunque*, e. g. 63°, *excitare*. Fig. 115.

Imo. Conſtruetur per *Transportatorium*, de quo §. 18. IIdo. Per concentricorum Semicirculorum aliquem. IIItio. Per *Circinum Proportionum* *, ſi in Linea Chordarum capias *directe* Chordam 63°, C*e*; eamque *transverſim* ponas inter 60 & 60: deinde, ducto prius ex B arcu indefinito *ax*, lineæ *a*B intervallum extendas in Circino pariter *directe*, ex C in α, atque ex α capias *transverſim* latitudinem $\alpha\delta$, quam velut Chordam pones in anguli tui conſtruendi latere BA ex *a* in *d*. Ductâ demum B*d*D, erit Angulus B = 63°. Demonſtrationem colliges ex Probl. præced. n. 3. IVto. *Per Scalam*. Ex Scala 1000 partium cape intervallum 500 pro Radio, iſtoque duces ex lineæ AB puncto B arcum indefinitum AD. 2do, accipe ex Scala tot milleſimas, quot competunt ſecundum Tabellam pag. 71. Chordæ 63°, poſito Diametrum ſtatui 1000 partium & Radium 500; invenies particulas $522\frac{5}{10}$: intervallum harum dabit Chordam AD; & juncta BD angulum 63 graduum.

*Fig. 114 & 115.

§. 173. SCHOLION. Qui Trigonometriam callet, & dicta §. 169, is per methodum IV. ope Tabellarum Sinuum, quorumcunque graduum ac minutorum angulos formabit. Solent etiam quidam Circino Proportion. inſcribere LINEAM TANGENTIUM, quæ ad formandos pariter angulos ſerviat. Nempe Radio 10000 vel 1000 poſito, excerpunt ex Tabulis Tan-

gentium particulas, cujusvis gradûs Tangenti competentes. Nec ultra gradum 45. progrediuntur, uſurpantes pro reliquis Tangentes Complementorum. Res ex Trigonometria claret. Unum adhuc noto, quomodo in Quadrati latere B D * in 1000 partes diviſo angulos etiam minutorum capere poſſis. Sit Bx 723 partium; quære hunc numerum in Tabula Tangentium ad Radium 1000, & invenies angulum 35 grad. 53 min. Cui æqualis eſt Inſtrumenti angulus B A x, per Prop. 32. Tab. V. *Tab. IV. Fig. 98.

Quomodo angulo dato alius æqualis conſtituendus, dictum fuit in §. 36.

PROBLEMA IV.

E. IV. 5.

§. 174. *Per tria data puncta* A, B, D, *in directum non jacentia, ducere Peripheriam circularem.* Tab. II. Fig. 52.

Conjunge puncta lineis A B, B D. In harum medio excita perpendiculares. Ex puncto interſectionis C, ceu centro, deſcribe intervallo C A arcum A B D *a*, qui tranſibit per dicta puncta.

DEMONSTR. Iſoſceliorum A B C, B D C crura ſunt æqualia; proinde A C & D C, æqualia tertio B C, æquantur & inter ſe. Unde ſi Radii extremitas A tranſeat per B, tranſibit & per C.

COROLLARIUM. Cuivis Triangulo Circulus circumſcribi poteſt. Habes enim in illo tria Apicum puncta.

PROBLEMA V.

§. 175. *Circulo Polygonum Regulare inſcribere.*

I. *Trigonum* inſcribes, ſi inſcripto priùs Hexagono, ducas rectas *ac*, *ce*, *ae*. Fig. 121. Patet ex Propoſ. 23.

II. *Quadratum* * inſcribitur, Diametro A B perpendiculariter biſectâ per aliam C D, du- E. IV. 6. *Fig. 122.

Tab. V. ctisque AC, CB, BD, DA. Hæ enim erunt æquales inter ſe *, & anguli ad Peripheriam Recti *, atque hinc æquales.

*Pr. 16. *Pr. 20.

F. IV. 11. III. *Pentagonum*. Inſcribatur Decagonum, cujus chorda invenitur per §. 122. n. 3. & diviſionis punctis alternatim omiſſis, Pentagonum.

F. IV. 15. IV. *Hexagonum*, ût conſtat, efficiet Radius ſexies circumductus.

Ex his colligitur, quomodo inſcribendum octogonum, ſi nempe poſt inſcriptum quadratum biſeces cujusvis chordæ arcum; quomodo pariter inſcribendum Dodecagonum, aliaque Polygona ex biſectione arcuum inventorum oriuntia.

SCHOLIA.

§. 176. I. Nondum repertus eſt modus Geometrice Circulo inſcribendi Polygona laterum 7, 9, 11, 13 &c. Equidem id ſatis propinque perficitur ope *Lineæ Quadratricis* a Dinoſtrate inventæ. Verum cùm ipſi adeo modi Geometrici mox recenſiti ægre in praxi ſatisfaciant, propterea quod circini pedes terminentur in puncta minime Mathematica, ſed ſæpe craſſe phyſica, ac modicus error aliquoties multiplicatus in notabilem excreſcat; ſuperſedeo plura de hac Quadratrice dicere, iſtud monens, accuratiſſimas Circuli diviſiones optime perfici mechanica circini tentantis applicatione. Praxi tamen ſæpe, quæ adjicio, adminiculum ferent, idque præſtabunt, ut Polygona ſaltem veris propiora celerius formentur.

II. ALITER itaque Polygona deſcribes, ſi dividas 360° per numerum laterum Polygoni, e.g. per 7, ſi Heptagonum deſideres: quotus $51\frac{3}{7}$ oſtendet, angulum Centri continere gradus 51 & 3 ſeptimas unius gradûs aut (ſi fractio reducatur ad eam, cujus denominator 60) proxime $51^{\circ}\frac{26}{60}$, i.e. $51^{\circ}\,26'$. Hunc igitur angulum ſepties acceptum ope Transportatorii, Polygoni centro

applicati, diſtribue per Peripheriam. Hunc in finem appono Tabellam, in qua præſto habeas variorum Polygonorum angulos tum ad Centrum, tum ad Peripheriam. Tabellæ hujus ſeries Ima exhibet numerum laterum Polygonorum diverſorum. IIda monſtrat angulos ad Centrum; IIItia angulos Polygonorum iſtorum. Tab. V.

I	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
II	120	90	72	60	51.26′	45	40	36	32.43′	30
III	60	90	108	120	128.34′	135	140	144	147.17′	150.

III. Facilis eſt etiam Polygonorum conſtructio per Chordas; Trigonometrice inveniendas per §. 169. & ex Scala 10000 partium deſumendas, Radium ponendo 5000. Nempe pro Trigono accipe chordam 120° = 8660 part. quæ per Peripheriam ter circumacta iſtud formabit: Tetragonum formabit Chorda = 7071, quater circumacta. Chordas haſce ſequens Tabella exhibet, quam ex jactis in §. 169. fundamentis quantum libet extendes.

Polyg.	Chord.	Pol.	Chord.
3.	8660.	8.	3827.
4.	7071.	9.	3429.
5.	5878.	10.	2250.
6.	5000.	11.	2815.
7.	4373.	12.	2588.

Si ex hac Tabella particulas chordarum transferas *directe* in Circinum Proport. inſtar Lineæ chordarum; nanciſcêris novam lineam, quam vocabis LINEAM POLYGONORUM. Quam aliis aliter placet ſupputare.

IV. Datâ lineâ *ab*, ſuper illam conſtrues Polygonum; ſi ad puncta *a* & *b* adjungas latera datæ *ab* æqualia, quæ utrobique forment angulum Polygoni, inveniendum ſupra in Tabell. n. II. His lateribus eadem ratione adjunge reliqua, dum Polygoni Figura perficiatur. Fig. 120.

PROBLEMA VI.

E. IV. 12.

§. 177. *Circulo Polygonum Regulare (v. g. Pentagonum) circumſcribere.*

Inſcribatur prius Polygonum ABCDE, & producantur Radii per puncta A, B, C &c. Fig. 123.

Tab. V. Per Chordarum media puncta *e* ducantur Radii O*x*, O*y*, &c. Demum per puncta *x*, *y*, &c. agantur rectæ vel parallelæ cum chordis, vel perpendiculares ad Radios O*x*, O*y*, &c. terminenturque ad Radios antea productos, in P, M, N, R &c. Erit factum.

Brevius operabitur, qui poſt inſcriptum Polygonum, duxerit lineas, quæ & Circulum tangant, & cum inſcriptis chordis parallelæ ſint.

DEMONSTRATIO. Perpendiculares O*e* ſunt omnes æquales, Chordasque æquales biſecant *. 2do, Rectæ PM, MN, NR &c. ex operatione evadunt cum Chordis inſcriptis parallelæ: Ergo intra Triangulum *x*NO ùt O*e*:O*x*::*e*A:*x*N; pariter in Triang. *y*NO, ùt O*e*:O*y* i.e. O*x*::*e*A:*y*N. * Æquantur igitur *x*N, N*y* *, ſimiliter N*y*, *y*R; aut *x*N, *x*M &c. Æqualia proinde ſunt RN, NM, MP &c. Quare demum etiam id, quod circumſcriptum fuit, Polygonum Regulare eſt, per §. 63. Def. 7.

* *Pr.* 17.
* *Pr.* 25.
* §. 89. *Ax.* 3.

Ex hac Demonſtratione patebit ratio Problematis ſequentis, quod unum ex præcipuis eſt.

PROBLEMA VII.

§. 178. *Invenire proxime Proportionem Diametri ad Peripheriam.*

Si poſito Radio partium 100,000,000,000, quæratur, ſecundùm §. 122. Num. 5., Sinus unius minuti; erit is 29088820; & Tangens 1 minuti erit 29088821. Jam ſi tam Sinus iſte quam dicta Tangens duplicentur; evadet ille Chorda 2 minutorum, ſimulque latus Poly-

goni Inſcripti, compoſiti ex 10800 lateribus; & Tangens evadet latus Polygoni circumſcripti, compoſiti ex 10800 lateribus. Quare ſi duplum tum Sinûs tum Tangentis iſtius multiplicetur per 10800, prodibit nunc 628318512000, i.e. Perimeter Polygoni Inſcripti; & 6283185533600, i.e. Perimeter Polygoni circumſcripti. Sed Inſcripti Perimeter eſt minor Peripheriâ Circuli, & Perimeter Circumſcripti eſt major illa (ambæ tamen Perimetri nihil ſenſibiliter differunt ab ipſa Circuli peripheria). Igitur ſi inter utramque Perimetrum ſumatur quantitas Arithmetice media *, 6283185513800; hæc proxime accedet ad ipſam peripheriam, ita ut jam ſit Diameter ad Peripheriam, ût 2000000000000 ad 6283185513800, vel (ſi utrumque numerum dividas per 2000000000) ût 1000 ad 3141; vel ût 100 ad 314. *Si ſumeres Sinum & Tangentem unius minuti ſecundi aut tertii, immenſum in modum fieret proximior æqualitas inter Polygoni In- & Circumſcripti Perimetros.* Tab. V. * Arithm. Pr. 34. Cor. I.

§. 179. COROLLARIUM I. Datâ quavis Peripheriâ, v.g. 264 pedum, dabitur ejus Diameter, ſi fiat: ût 314 ad 100, ita 264 ad $84\frac{24}{314}$. Viciſſim datâ Diametro 400 ped. dabitur Peripheria, ſi fiat: ût 100 ad 314, ita 400 ad 1256.

§. 180. COROLLARIUM II. Invenies itaque Proportionem Diametri ad certam portionem Peripheriæ v.g. ad arcum 30°, ſi Regulâ aureâ utare in hunc modum: 360° dant 3141 (ex hypotheſi, Diametrum eſſe 1000) quid 30°? Reſp. $361\frac{3}{4}$. Vel Sinum unius minuti (qui ab arcu 1′ phyſice non differt) multiplica

Tab. V. per 1800, numerum omnium minutorum, quæ efficiunt 30 gradus, prodibit 5236200, portio peripheriæ 30°, dum Radius eſt 10000000. Hac ipſa ratione invenies denuo, Proportionem Diametri ad peripheriam eſſe ut 100 ad 314, ſi multiplices Sinum unius minuti per 21600, numerum omnium minutorum, quæ ſunt in tota Peripheria, & productum 62834400 cum Diametro 20000000 conferas.

SCHOLIA.

Fig. 123. §. 181. I. In §. 179. citra Demonſtrationem aſſumpſi, Perimetrum Polygoni Inſcripti eſſe minorem, & Circumſcripti eſſe majorem Peripheriâ Circuli: id enim & ex ſe ſat claret, & ab Archimede inter Axiomata ponitur. Et vero Polygoni inſcripti latus AB eſſe minus arcu A x B, patet ex §. 29. Ax. 10. Circumſcripti autem Tangentes RN, NM, cùm in unico puncto *y* & *x* peripheriam tangant, cæterà extra Circulum cadant *; fiet, ut ſemiſſes *y*N, N*x*, præter aream Sectoris *y o x*, includant adhuc Spatium aliquod extra Circulum exiſtens. Quo poſito, per ſe clariſſimum eſt, ipſas *y*N, N*x*, majore circuitu gaudere, quam quem Sectoris arcus habet. Hæc applicantur reliquis Perimetrorum & Peripheriæ partibus.

* *Pr.* 19.

II. Ut vera Ratio, quam Diameter ad Peripheriam habet, Geometrice & ſine defectu inveniretur, nondum aſſequi potuit humani ingenii induſtria. Per approximationem tamen ad veram eousque ventum eſt, ut perfectior fruſtra deſideretur. Inveniendæ hujus Rationis modum primus aperuit Archimedes, aſſumens Polygonum In- & Circumſcriptum 96 laterum; ex quo deprehendit habere ſe Diametrum ad Peripheriam prope ùt 7 ad 22. Accuratiorem calculum alii inierunt. Sed omnium labores vicit Ludolphus a Ceulen, qui incipiens a latere Quadrati inſcripti & circumſcripti, biſectione arcuum ſexagies repetita, arduo ſane ac improbo calculi labore hanc conſecutus eſt Rationem. Si ſtatuatur

Diameter

100000, 000000, 000000, 000000, 000000, 000000;

eſt Peripheria verâ minor

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950288;

& Peripheria verâ major eſt

314159, 265358, 979323, 846264, 338327, 950289.

III. Commendatur paſſim proportio in minoribus terminis a Metio eruta; juxta quem ſe habet Diameter ad Peripheriam, ùt 113 ad 355. Nam ſi fiat ùt 113 ad 355, ita 10, 000, 000 ad *x*, provenit *x* = 31415929, quæ a veriore Ludolphiana differt ſolum 3 particulis decimillioneſimis.

AR-

ARTICULUS III.

Tab. V.

Diſtantiarum & Altitudinum dimenſio.

PROBLEMA I.

§. 182. *Metiri diſtantiam* BC, *ad cujus unum extremum* B *accedi poteſt.* Fig. 125.

1mo. Trigonometrice. Statue Semicirculum in B ita, ut per Dioptras Diametri videas baculum A, figendum alicubi intra lineam opticam Br. Inſtrumentum nunc immotum perſiſtat; ſola Regula dioptrica moveatur, ut per ejus dioptras appareat terminus C, & nota angulum CBA. Demum in puncto B relinque baculum*. 2do. Transfer *§. 151. nunc Inſtrumentum ad Stationem ſecundam ſeu punctum A; atque ibidem Inſtrumentum verſa, dum per dioptras laterales vel Diametri conſpicias baculum B. Immoto nunc Inſtrumento, dirigatur ſola Regula in C; notetur angulus BAC. 3tio. Metire mechanice i.e. Catenâ, vel Fune, vel Perticâ &c. diſtantiam AB. Ponamus, hanc eſſe pedum 240, angulum ABC eſſe 89°, & BAC 70°. 4to. Ad inveniendum nunc latus BC ita progredere; Dic: ùt Sinus Anguli C (21°) ad Sinum Anguli A, ita AB ad BC. In numeris: ùt 35837:94552::240:633. Eſt igitur BC 633 pedum. Pari ratione manifeſtabitur latus AC, ſi dicas: ùt Sinus anguli C ad Sinum anguli B, ita BA ad AC. Demonſtratio claret ex Propos. 33. Probl. 1.

Scholion. *Hæc methodus collineandi, baculos aut alia ſigna collineationum figendi, relinquendi, Diametrum*

Tab. V. *Semicirculi, vel latus Quadrati ope Dioptrarum lateralium dirigendi in Stationem oppoſitam, ſervatur & ſupponitur in operationibus ſequentibus. Sed ne uni Inſtrumento aut metiendi methodo te neceſſitas addicat; varietatem ſubjicio.*

Fig. 128. §. 182. II. Per QUADRATUM Geometricum fit diſtantiæ BC menſuratio, ſi hoc ita collocetur in puncto B, ut per dioptras lateris B*i* perſpicias terminum C; deinde intra lineam opticam B*xm* figat tibi quispiam ſignum in puncto arbitrario A. 2do. In Statione A, poſtquam direxiſti latus *mn* in B, collinea per dioptricam Regulam in C, obſervans, quot partes hæc abſcindat in latere *gu*, quod ſupponimus hîc in 1000 partes diviſum. Abſcindat ipſam *gr* 700 partium. Metire Mechanice Spatium BA (quod rurſus ponemus eſſe 240 pedum) & calculum proportionis adhibe dicens: ùt 700 ad 1000, ita 240 ad 342 $\frac{6}{7}$ = BC.

DEMONSTR. Concipe perpendicularem *rs* = *un*; concipe item duo Triangula æquiangula, unum opticum ABC, alterum *msr* in Inſtrumento; nam Anguli ad B & *s* ſunt Recti, angulus ad A communis. Ergo ùt *ms* (i.e. *gr*) ad *sr* (i.e. *un*), ita AB ad BC. In numeris: 700:1000::240:342.

* Fig. 127. SCHOLION. I. *Quidſi autem Regula abſcinderet in latere* * n u *partem* n r = 700? *Reſp. Concipe perpendicularem* r s = u g; *& erit, ùt A* n (*i.e.* u g = 1000) *ad* n r = 700, *ita AB ad BC.*

SCHOLION II. *Quomodo per Quadratum menſurentur diſtantiæ, etiamſi angulorum quilibet ſit acutus vel obtuſus, docet P. Schottus in Curſu Mathem.*

Fig. 125. §. 183. III. Per SCALAM. Inquire ſuper Aſtrolabium angulos A & B, item diſtantiam AB, uti in §. 181. 2do. Accipe ex Scala

particulas 240, quæ tibi repræſentent propor- Tab.
tionaliter in linea *ab* pedes diſtantiæ AB. Fac V.
ad *a* & *b* angulos æquales illis ad A & B, per lineas *ac* & *bc* concurrentes in *c*. 3^tio^ Lineam *bc* circino captam explora ad Scalam; & ſi continuerit Scalæ particulas 633, dices, totidem pedum eſſe lineam BC.

DEMONSTR. Triangula ABC, *abc*, ſunt ſimilia: igitur ut *ab* : *bc* :: AB : BC.

§. 184. IV. Per MENSULAM Prætorianam. Firmetur Inſtrumentum in prima Statione B; deinde Regula Dioptrica dirigatur in C, juxta quam ducatur Stylo acutiore vel plumbagine linea indefinita *bc*. Ad cujus punctum extremum *b*, vertatur ac dirigatur Regula in A, ducaturque juxta Regulam indefinita *bx*. 2do Transibis ex B in A, metiens ſimul diſtantiam BA; quam ſi inveneris eſſe pedum 240, deſume ex Scala particulas totidem, nempe 240, iſtasque pone ex *b* in *a*. 3^tio^ In Statione A, poſtquam ope Regulæ direxiſti lineam *ab* verſus B, collinea per eandem in C ita, ut radat punctum *a*; & duc juxta Regulam tertium latus *ac*, pro Triangulo *abc*. 4to demum, vide quot Scalæ particulas contineat ipſa *bc*; totidem enim pedum erit linea BC. *Dem.* Quia in æquiangulis ABC, *abc* eſt *ab*:*bc* :: AB : BC. Fig. 126.

Eodem modo poterat inveniri diſtantia AC.

PROBLEMA II.

§. 185. *Metiri diſtantiam* DC, *prorſus inacceſſam.* Fig. 129.

Tab. V. Semicirculo poſito in B, ejusque Diametro directâ verſus A, collinea per dioptras *primo* in D, 2do in C, bene notando angulos *m* & ABC. II. Idem fac in A, notans ibi angulos *r* & *s*. Fiat etiam cognita AB, & per Probl. præced. quæratur Trianguli BAD latus AD, & Trianguli BAC latus AC. Cognitis autem AD & AC cum angulo intercepto *r*, cognoſcetur & DC *.

* Pr. 33. Probl. 3.

SCHOL. *Eâdem prorſus ratione metieris diſtantiam inacceſſam* ab *duorum objectorum, montibus impoſitorum. Fig.* 131.

PROBLEMA III.

Fig. 130. §. 186. *Metiri Lineam* BD, *cujus extrema ſolum puncta* B & D, *ſunt ex* C *acceſſa.*

Invento angulo C, menſisque lateribus CB, CD, prodibit Latus BD per Propos. 33. Probl. 3.

PROBLEMA IV.

Fig. 132. §. 187. *Metiri altitudinem perpendicularem* BR, *ad cujus punctum unum* A *patet horizontalis acceſſus* CA.

I^mo^. TRIGONOMETRICE. Semicirculi Diametro bene horizontaliter librata, ope fili ponduſculo gravati & per medium peripheriæ punctum tranſeuntis, dirige Dioptram in B, & nota arcum *rs* vel angulum *r*C*s* = ACB*. 2do. Metire diſtantiam acceſſibilem CA. Fiat nunc, adhibito calculo: ut Radius ad Tangentem anguli ACB, ita CA ad AB *. Cui inventæ BA adde reliquam altitudinis partem AR.

* Pr. 1.

* Pr. 32. Probl. 4.

§. 188. SCHOLION. *Angulus ACB * capi etiam poteſt alio modo, nempe ſi per dioptras laterales vel Diametri collinees in B. Tunc enim filum ex centro pendens dabit angulum s C u (cujus arcus intercipitur inter filum pendulum & Peripheriæ gradum 90) æqualem ipſi BCA. Nam quia ob parallelas BA, Cs, internus B æquatur externo r C s *; erit s C u Complementum ad Rectum, adeoque æqualis ipſi BCA *.* Tab. V. * Fig. 133. * Pr. 6. p. 1. * Pr. 7. Cor. 1.

§. 189. II. *Quadrato Geometrico* eadem operatio perficitur, ſi Quadratum erigatur verticaliter, & latus *m* C fiat exacte Horizontale, quod fit ope fili *p q*, per latus *p* C penduli. Regulâ in punctum B directâ, nota partes abſciſſas in latere *p u*; ponamus, abſciſſas eſſe partes 712. Metire nunc diſtantiam CA, quæ ſit e.g. 42 Decemped. & 4 ped. Fiat itaque: ut 712 ad 1000, ita 424′ ad 595′ = BA. Demonſtrationem ſumes ex §. 182. Fig. 124.

PROBLEMA V.

§. 190. *Metiri Perpendicularem* AB, *quando ad eam patet acceſſus* CA, *ſed non horizontalis.* Tab. VI. Fig. 134.

Metire diſtantiam AC, & in A angulum CAB, Aſtrolabio autem in C poſito angulum BCA. Inde cognitum fiet * latus AB; imo &, ſi volueris, latus CB. * Pr. 33. Probl. 1.

II. Si vero angulum ad A nequeas commode capere; Aſtrolabii Diametro *r s* horizontaliter ſtatutâ, vel methodo indicatâ §. 188, metire angulum PCA = *a* C *r*, inde invenies * Trianguli rectanguli P C A angulum CAP, & per hunc, angulum contiguum CAB. Cognitis igitur nunc latere CA, & * Pr. 7. Cor. 2.

Tab. VI. angulis ad extremitatem, cognoſcetur *per Prop. 33. Probl.* 1. latus BA.

PROBLEMA VI.

Fig. 134. §. 191. *Metiri Altitudinem* AB, *quando ad neutrum ejus extremum patet acceſſus.*

Electis commodis Stationibus S & C, metire in S angulos BSC, ASC, deinde diſtantiam SC: & in C metire angulos SCB, SCA, BCA, atque inde invenito (ùt in reſolutione Problematis I. factum) latera BC, CA. Ex quo porro cognoſcetur * Trianguli CAB latus AB.

* Pr. 33. Probl. 3.

SCHOLION. Simili ratione metieris ipſam AB, etſi hæc non ſit Perpendicularis.

PROBLEMA VII.

Fig. 134. §. 192. *Invenire Altitudinem Perpendicularem* AP *alicujus montis.*

Invenito vel mechanice, vel, ſi opus ſit, per Probl. 1. Trianguli SCA latus CA, ac deinde per Aſtrolabium angulum ACP = rCa. Demum fiat: ùt Radius ad Sinum anguli ACP, ita CA ad AP *.

* Pr. 32. Probl. 4.

SCHOLIA.

§. 193. I. Problemata, II, III, IV, V, VI, VII, ſolvi pariter poſſunt per Scalam & Menſulam, ùt facile patebit intelligenti operationes Problematis I, & harum rationes. Eſt tamen in ipſis Inſtrumentis & horum applicatione delectus quidam habendus, ut, quod intendis, facilius aſſequare. Nam ad dimenſiones accuratius inſtituendas facit, cæteris paribus, primum Calculus Trigonometricus, deinde Quadratum, tum Scala & Menſula. Quadratum opportune applicatur ad inveniendas diſtantias Horizontales, præprimis quando in Stationum

una angulum Rectum formare licet. Ad operationes celerius perficiendas præſtat uſus Menſulæ vel Scalæ. Tab. VI.

II. Quidquid Semicirculus hactenus præſtitit, præſtare & poterat unus Quadrans ABN, cùm & per hunc metiri liceat vel ipſos angulos obtuſos, e.g. obtuſum MAC. Nam ſi in A Quadrantem colloces, ùt figura monſtrat; capies quidem in illo acutum NAC; aſt huic ſi addas Rectum MAN, mentaliter concipiendum; cognoſcetur totus obtuſus MAC. Fig. 154.

III. Multum refert ad accuratiores dimenſiones, quas Stationes eligas. Nam dum Altitudines metiris, cavendum, ne Angulus C (*Tab*. V. *Fig*. 124) propius accedat ad Rectum; ſecus error in Inſtrumento fere inſenſibilis, inducet errorem in latere dimetiendo valde ſenſibilem & craſſum: idcirco Stationis diſtantia in hoc caſu non ſit nimium parva; ſed neque ſit enormiter longa; angulus enim C tunc valde acutus faciet te multum aberrare a vera AB. Juſta autem & optima erit, ſi angulus C ſit circiter 45 graduum. Hallucinationi etiam obnoxius es, ſi ſumeres (in Probl. I.) Stationem AB valde magnam, & angulos ad extremitatem nimium acutos; vel ſi ob Stationem AB juſto minorem ſumeres angulos eosdem Rectis viciniores; item ſi (*in Tab. V, Fig*. 130) angulus C inter duo latera interceptus foret valde obtuſus. Conſultum erit in Probl. I. capeſſere diſtantiam AB prope æqualem inveniendæ BC, & in Figura 129. ipſam AB fere æqualem inveniendæ DC. Super his videri meretur P. Taquet S. J. in Geom. Pract. L. I.

IV. Sufficiunt ſuperiora Problemata, ut ingenium non omnino hebes omnem pene caſum ſuperare queat: ſi enim una operatio non ſufficiat, in ſubſidium adhibendæ erunt duæ tresve aliæ. Vix admonitione eget, foſſarum valliumque profunditates ſimili ratione, quâ altitudines, menſurari, modo Stationes hîc in loco editiore capiantur. Siquando Inſtrumentis careas, licebit ſolis baculis hunc in modum inveſtigare diſtantiam AB*. Fixo in C baculo producatur AC, ita ut fiat *a* C = CA: & ex puncto *m* in *Fig. 147.

Tab. VI. ipſa AB electo, fiat m C = C a. 2do. in producta a n figatur & determinetur punctum b. ita, ut b C B ſit una Recta. Quo facto erit b a = BA. Nam ob æqualia
*Pr. 2. Triangula * A m C, a n C, æquantur & Anguli A, a,
Pr. 3. atque exinde ipſa B A C, b a C. Ergo. Aliàs Inſtrumento deſtitutus invenies diſtantiam BD (Tab. V. Fig. 130) cujus extremitates D & B ſolum accedi poſſunt ex C, ſi menſus ambas CB, CD, ſumas utriusque partes ſimiles (v g. dimidium, vel duas tertias &c.) in C b, C d; nam ipſa b d, quæ tota accessa eſt, erit etiam ipſius BD dimi-
*Pr. 25. dium vel duæ tertiæ *. Sic etiam invenies ipſam AB *,
*Fig. 147. cujus puncta ſolum A & B acceſſa ſunt ex C, ſi per C duxeris B C b & A C a, ita ut fiat C b = CB, & a C = CA;
*Pr. 4. nam a b erit = AB *. Si cupias Altitudinem BC (Tab. V. Fig. 127.) utcunque metiri, ſupinus humi cuba porrectus ex A verſus B. Inter oculum A & Altitudinis extremum B ponat aliquis perticam perpendicularem n r, donec oculus A per punctum r ipſum C attingat; erit ut A n ad n r, ita A B ad B C. Qui plura deſiderat, adeat P. Clavii S. J. & P. Taquet Geom. Pract. P. De Chales Tom. II. L. 1. P. Schotti Curſum Mathematicum, aut Ejusd. Pantom. Kircher. ubi Pantometri uſum late explicat; item Benthemum & Zolmannum. Novum Inſtrumentum Goniometricum Tubo optico inſtructum ad diſtantias magnas facilius metiendas, abs ſe inventum deſcribit D. Tobias Mayer in Commentario Societatis Regiæ Götting. Tomo II, ad A. 1752. Unum adhuc commemoro, quo Tironem carere nollem, ſcil. Cl. Domini Marinoni librum de Re Ichnographica, in quo exactiſſime & ad ſcrupulum uſque Geometriam Practicam exponit; errores perſequitur; Menſulæ uſum tutiorem & ampliorem reddit.

ARTICULUS IV.

Ichnographias perficere, ſeu locorum planorum Perimetros vel Schemata delineare.

Fig. 136. §. 194. PRIMUS MODUS. *Quando locus delineandus pervius eſt.* Menſulâ intra locum

in O firmatâ, dirigatur Regula Dioptrica circa acum volubilis in puncta A, B, C, D, E; ducanturque in Menſula juxta Regulam lineæ. 2do. Metire diſtantias AO, BO, CO, DO, EO; & ope Scalæ fac iis proportionales ipſas *ao*, *bo*, *co*, *do*, *eo*. Ductis demum *ab*, *bc*, *cd* &c. claude Figuram. Erit factum. Nam Triangula chartæ ſunt ſimilia illis, quæ ſunt in Campo *. Ergo ambæ Figuræ ſimiles *. Tab. VI. * Pr. 26. Cor. 1. * §. 86. Def. 2.

SCHOLION. Eadem Ichnographia perficietur per Aſtrolabium in *o* firmatum, ſi notes in illo angulos ad *o*, formesque in charta totidem angulos, notatis æquales, & lineas ipſis AO, BO, CO &c. proportionales.

§. 195. IIdus MODUS. *Quando locus delineandus non eſt pervius, circumiri tamen poteſt.* Menſulâ in A poſitâ, directisque Dioptris in E, deinde in B, duc ſuper Menſulam indefinitas *ae*, *ab*. 2do. Metire lineas Campeſtres AE, AB, & his fac proportionales ipſas *ae*, *ab*. 3tio. Tranſi ad punctum B, ubi poſt lineam *ba* in A directam, verte dioptram circa punctum *b* verſus C, ut capiatur angulus *abc*; & dum hinc in C migras, metire inter deambulandum latus BC, eique proportionalem fac Rectam *bc*. Et ſic porro. Tunc enimvero in Statione D, poſtquam feciſti ipſam *de* ipſi DE proportionalem, formabis ſuper Menſulam figuram *abcde*, Campeſtri ABCDE ſimilem, ob angulos utrimque æquales, & latera circa hos proportionalia. Fig. 135.

§. 196. SCHOLION I. Si in Statione E ambo latera *ea*, *ed*, exacte coincidant cum lateribus EA, ED; ſignum eſt, operationem rite fuiſſe peractam; ſecus, ſi non coincidant.

Tab. VI. ipſa AB electo, fiat $mC = Ca$. 2do. in producta an figatur & determinetur punctum b. ita, ut bCB ſit una Recta. Quo facto erit $ba = BA$. Nam ob æqualia Triangula * AmC, anC, æquantur & Anguli A, a, atque exinde ipſa BAC, baC *, Ergo. Aliàs Inſtrumento deſtitutus invenies diſtantiam BD (Tab. V. Fig. 130) cujus extremitates D & B ſolum accedi poſſunt ex C, ſi menſus ambas CB, CD, ſumas utriusque partes ſimiles (v g. dimidium, vel duas tertias &c.) in Cb, Cd; nam ipſa bd, quæ tota acceſſa eſt, erit etiam ipſius BD dimidium vel duæ tertiæ *. Sic etiam invenies ipſam AB *, cujus puncta ſolum A & B acceſſa ſunt ex C, ſi per C duxeris BCb & ACa, ita ut fiat $Cb = CB$, & $aC = CA$; nam ab erit $= AB$ *. Si cupias Altitudinem BC (Tab. V. Fig. 127.) utcunque metiri, ſupinus humi cuba porrectus ex A verſus B. Inter oculum A & Altitudinis extremum B ponat aliquis perticam perpendicularem nr, donec oculus A per punctum r ipſum C attingat; erit ut An ad nr, ita AB ad BC. Qui plura deſiderat, adeat P. Clavii S. J. & P. Taquet Geom. Pract. P. De Chales Tom. II. L. 1. R. Schotti Curſum Mathematicum, aut Ejusd. Pantom. Kircher. ubi Pantometri uſum late explicat; item Penthenum & Zollmannum. Novum Inſtrumentum Goniometricum Tubo optico inſtructum ad diſtantias magnas facilius metiendas, abs ſe inventum deſcribit D. Tobias Mayer in Commentario Societatis Regiæ Götting. Tomo II, ad A. 1752. Unum adhuc commemoro, quo Tironem carere nollem, ſcil. Cl. Domini Marinoni librum de Re Ichnographica, in quo exactiſſime & ad ſcrupulum uſque Geometriam Practicam exponit; errores perſequitur; Menſulæ uſum tutiorem & ampliorem reddit.

Margin notes: * Pr. 2. * Pr. 3. * Pr. 25. * Fig. 147. * Pr. 2.

ARTICULUS IV.

Ichnographias perficere, ſeu locorum planorum Perimetros vel Schemata delineare.

Fig. 136. §. 194. PRIMUS MODUS. *Quando locus delineandus pervius eſt.* Menſulâ intra locum

in O firmatâ, dirigatur Regula Dioptrica circa axem volubilis in puncta A, B, C, D, E; ducanturque in Menſula juxta Regulam lineæ. 2do. Metire diſtantias AO, BO, CO, DO, EO; & ope Scalæ fac iis proportionales ipſas *ao*, *bo*, *co*, *do*, *eo*. Ductis demum *ab*, *bc*, *cd* &c. claude Figuram. Erit factum. Nam Triangula chartæ ſunt ſimilia illis, quæ ſunt in Campo *. Ergo ambæ Figuræ ſimiles *. Tab. VI. * Pr. 26. Cor. 1. * §. 86. Def. 8.

SCHOLION. Eadem Ichnographia perficietur per Aſtrolabium in *o* firmatum, ſi notes in illo angulos ad *o*, formesque in charta totidem angulos, notatis æquales, & lineas ipſis AO, BO, CO &c. proportionales.

§. 195. II^dus MODUS. *Quando locus delineandus non eſt pervius, circumiri tamen poteſt.* Menſulâ in A poſitâ, directisque Dioptris in E, deinde in B, duc ſuper Menſulam indefinitas *ae*, *ab*. 2do. Metire lineas Campeſtres AE, AB, & his fac proportionales ipſas *ae*, *ab*. 3tio. Tranſi ad punctum B, ubi poſt lineam *ba* in A directam, verte dioptram circa punctum *b* verſus C, ut capiatur angulus *abc*; & dum hinc in C migras, metire inter deambulandum latus BC, eique proportionalem fac Rectam *bc*. Et ſic porro. Tunc enimvero in Statione D, poſtquam feciſti ipſam *de* ipſi DE proportionalem, formabis ſuper Menſulam figuram *abcde*, Campeſtri ABCDE ſimilem, ob angulos utrimque æquales, & latera circa hos proportionalia. Fig. 135.

§. 196. SCHOLION I. Si in Statione E ambo latera *ea*, *ed*, exacte coincidant cum lateribus EA, ED; ſignum eſt, operationem rite fuiſſe peractam; ſecus, ſi non coincidant.

Tab. VI. Fig. 137. **SCHOLION II.** Idem præſtabit Regula Dioptrica, cui Pyxis Magnetica adjuncta. Nam Regulâ ex A verſus B directâ, vide quem gradum attingat Magneticæ Acûs cuſpis: deinde Regulam dirige verſus E, & numera gradus a mox dicto ad novum, quem nunc acus deſignat, & ſcies Angulum B A E; ſic etiam metieris Angulos E, D, C, B. Metire & latera A B, B C, C D &c. ado, Domi (niſi malueris ut ante in Menſula ruri omnia perficere) fac, ut Acus eosdem gradus notet, quos ruri; & fac latera circa hos Campeſtribus proportionalia, & Ichnographiam confeceris. Quo pacto ſimul obtinebis, ut partes in charta delineandæ eundem verſus Mundi Plagas ſitum naucîſcantur, quem ruri habebant.

Ad eundem modum Ichnographiam deſcribes, ſi angulos capias Semicirculo, ut Figura 145. docet.

Fig. 138. §. 197. III^tius MODUS. *Quando locus delineandus nec pervius eſt, nec commode circumiri poteſt.* Colloca Menſulam in locis editioribus X, Z, e quibus latior pateat in ſubjectam regionem proſpectus. Et 1mo duc in Menſula lineam *on*, ex Scala deſumptam & proportionalem Campeſtri XZ, quæ prius vel Mechanice vel, ſi opus, per Art. III. Probl. I. aliumve modum quærenda. 2do. Menſulæ in X poſitæ linea *on* dirigatur in Z, & circa punctum *o* verſetur Regula in objecta nobiliora P, Q, R, S, T, V, ductis juxta Regulam lineis indefinitis *o*P, *o*Q, *o*R &c. 3^tio. Tranſi in Z, & lineâ *no* Stationem X reſpiciente, dirigatur Regula circa punctum *n* in eadem priora objecta; & duc lineas concurrentes in *n*, notando punctum concurſûs binarum linearum ad idem objectum directarum, poterisque nunc in concurſuum punctis delineare ipſa objecta, proportionalibus intervallis diſſita. Ratio hujus operationis una eademque cum ſuperioribus perſiſtit, quod Triangula chartæ ſint ſimilia Triangulis opticis Campi.

SCHOLION. Idem accuratius, operoſius tamen perficietur Trigonometricè ope Aſtrolabii in editioribus Stationibus X & Z intra Regionem vel aliquam urbem electis. Ubi nota, cavendum hic eſſe ab angulis nimium aut acutis aut obtuſis; cum hi errorem magnum facile inducant. Unde ſi occurrat obtuſangulum Z X A, cujus latus A X ſcrutaris; præſtat hoc ipſum in operatione tantisper omittere, & invento Trianguli X Z B latere X B, tranſire in B, ibidemque capto angulo X B A invenire, per Art. præc. Probl. I, latus A X. Idem facerem circa Trianguli X Z G latus Z G. Tab. VI. Fig. 139.

Obſervationes
ad Praxin perquam utiles, quæ revocari ad hunc locum poſſunt.

§. 198. *I. Inſtrumentum Magneticum, de quo in* §. 196. *ſerviet etiam ad Ichnographias urbium & platearum delineandas, ſi nempe in platearum una, quoadusque licuerit, recta progrediare, metiarisque lineæ hujus longitudinem, &, ſi placuerit, perpendiculares, quæ in hanc lineam cadunt, & ædium utrimque poſitarum diſtantiam ab ipſa ſignant. Tum vero ſi in ipſa platea vel ad ejus extremum via alio flectenda erit, notabuntur diligenter & anguli flexionis & rectarum novarum longitudines, omnia domi in chartam ſimiliter & proportionaliter transferenda. Quæ quidem translatio eo fiet accuratior, ſi idem Inſtrumentum, quo foris utebaris, domi adhibeatur.*

§. 199. *II. Eadem Acus ſerviet ad ſternendam in Sylva rectam ſemitam A B, ſi, quà Sylva commode pervia eſt, per rectas A* e, e d, d c, c *B, angulis connexas, tum deinde domi deſcribas angulos angulis* e, d, c, *æquales & latera ipſis A* e, e d, d c, c B *proportionalia; & puncta extrema A & B conjungas unâ rectâ A B, notesque in charta angulum B A* e. *Jam ruri ſuper Menſulam dirige in Statione A ope Acûs Magnet. chartæ tuæ lineam A* e *ita, ut coincidat cum nupera Sylveſtri A* e, *& verſatâ Regulâ forma angulum B A* e. *Ac ſecundum Diopt. directionem progredere; & efficies tramitem rectum ex A in B, per* §. 193. *Cæterum in Ichnographiis, dum potes, Acu Magneticâ ſepoſitâ, alia Inſtrumenta adhibe; hæc enim magis fide angulos flexionis monſtrant præ illa.* Fig. 148.

§. 200. *III. Quia locorum Ichnographias repræſentamus tanquam in Plano Horizontali deſcriptas, hinc,* Fig. 140.

Tab. VI. *ſi in delineatione urbis vel regionis occurrat Menſori linea aliqua A E, ad Horizontem obliqua; in chartam minime transferes hujus A E longitudinem, ſed ſolùm horizontalem lineam A P, tanquam baſin ductam ex A ad Perpendiculum E P, inveniendam per* §. 187. *&* Pr. 32. Vel, *ut aliter hujusmodi Horizontales invenias, incipe vel in ſummo vel in infimo loco A extendere ex perpendiculari Pertica* A a *horizontalem catenam, aut funem* a B, *vel ope Gnomonis longioris vel Aſtrolabii penduli quære ipſas* a B, b C, c D, d E; *harum enim Summa dabit ipſam Horizontalem A P. Pari ratione collectæ in unam Summam, rectæ* Perpendiculares d D, c C, b B, a A, *dabunt Altitudinem Perpendicularem E P.*

Fig. 142. §. 201. *IV. Ex his conficitur, quomodo in plano delineandæ ſint Ichnographiæ locorum declivium, ſpecuum, meatuum, cuniculorum ſubterraneorum. Pro quo adhuc paranda eſt capſula Magnetica intra annulos N & M ita libranda, ut baſis capſulæ ſemper ſervet ſitum horizontalem, & acus nihilominus pergat notare gradus & angulos flexionis cryptarum, tametſi funis vel pertica A B, cui annulus externus M affigitur, deorſum aut ſurſum dirigatur. Si perticæ A B affigas Semicirculum cum filo penſili ex centro,* *Pr. 32. *deſignabit is tibi angulum inclinationis* x ≅ *B, unde * facile baſis vel Cathetus eruitur.* *Fig. 149. ** Factâ locorum ſubterraneorum Ichnographiâ, haud difficile erit ope Acus Magneticæ ſub dio determinare angulos flexionis illis inferioribus & æquales & imminentes, adeoque & puncta ſubdialia, ſubterraneis* s, m, n, *impendentia. Imaginatio in hac operatione repræſentet ſibi plana verticalia, è plateis ſubterraneis ſupra tellurem aſcendentia & porrecta usque ad planum aliquod horizontale. Geometriam Subterraneam breviter attigit P. Schottus L. IV. Pantom. Kircher. latius & ex profeſſo expoſuerunt Nicolaus Voigtel, Weidlerus, Fridericus Wilh. De Oppel, Auguſtus Beyer; ex quibus diſces terminos technicos, menſuras, & reliqua, quæ apud Geometras Metallifodinarum in uſu poſita ſunt.*

§. 202. *V. Si operationes hucusque traditas invertas; poteris hortum, agrum, tramites, aliave in chartis pro arbitrio delineata transferre in ipſum Solum, Campum aut Regionem.*

§. 203. *VI. Lineam curvam, e.g. amnis littus* Cabcdmno *delineabis; ſi juxta hunc duxeris rectam vel rectas* (*CD, DM*) *quæ amnis ripam ſtringant, & e quibus ad angulos* a, b, e, *&c. quà amnis ſinuoſus eſt, duces perpendiculares: Fiant in charta lineæ, modo dictis proportionales; demum tum per extrema puncta* (a, b, c, d, *&c.*) *ipſarum Perpendicularium, tum ab hiſce punctis usque ad illa Linearum ſtringentium duc appoſite & congruenter lineas. Idem licebit facere in oppoſito littore per rectam MN; fluviumque intra planum MNCDM coërcere.* Tab. VI. Fig. 143.

§. 204. *VII. Ichnographia Regionis non magnæ, puta Agri, Prati, Horti, Villæ, Urbis &c. vocatur Topographia: majoris Regionis ac Ditionis delineatio Chorographia audit, quæ conficitur ex pluribus & conjunctis Chorographiis. Hæ ut accuratiores evadant, conſultum erit, diſtantias ſaltem præcipuas Trigonometrice indagare.*

Ad Ichnographiam perfectius claudendam, proderit nonnunquam ducere unam vel plures Diagonales (*e.g. in Fig.* 145. *ipſas AC, EC &c.*). *Hæ enim, ſi fors alicubi erratum fuerit, aptæ erunt ad corrigendum errorem. Ita Triangulum AEC idoneum erit ad determinandum tibi punctum C, ubi fors a vero aberraveris. Demum, quo pauciores in Perimetro angulos capis, eo accuratior figura, cæteris paribus, obtinebitur.*

CAPUT III.

Epipedometria.

ARTICULUS I.

Figurarum planarum ſecundum ſuperficiem dimenſio.

§. 205. NOTA. Sicut in Euthymetria, pro longitudinum menſura determinanda, aſſumuntur certæ magnitudinis Perticæ, pedes, pollices &c; ita Planimetria tanquam menſuram ſuperficierum aptiſſimam ſtatuit *Quadratum* determinatæ magnitudinis, e.g. Decempe-

Tab. VI. dæ, pedis, pollicis &c. Unde dicitur reperta eſſe ſuperficies aliqua, ſi cognitum fuerit, quot quadrata pedum vel pollicum &c. contineantur in illa. Recole ex Arithm. §§. 72. 84. Stereometria vero pro menſura Solidorum adhibet *Cubum* definitæ magnitudinis, e.g. Perticæ, pedis, digiti, lineæ &c.

PROBLEMA I.

Fig. 151. §. 206. *Invenire aream Rectanguli* ABCD.

Inveniatur per menſuram homogeneam longitudo baſeos & altitudinis (ſit AB = 3 ped. & BC 2 ped.) Deinde duc AB in BC: productum (6) dabit aream totam (6 pedum quadratorum).

DEMONSTR. Quia Rectangulum poteſt concipi generari, ſi perpendicularis altitudo BC moveatur ſub angulo recto ex B in A, veſtigium ſui relinquens: ſane dum BC movetur per B*r*, ſpatium unius pedis; deſcripſit tot pedum quadrata, quot ſunt pedes tanquam unitates in BC. Idem fit, dum migrat per *rs*, & per *s*A. Itaque univerſim toties bina pedum quadrata ſunt deſcripta, quot ſunt unitates in tota AB. Quod autem duo quadrilatera M & N ſint quadrata eaque æqualia, liquet ex §. 20, Prop. 6, & Prop. 9. Cor. 2.

SCHOLION. Si Baſis AB ſit ped. 2, & Altitudo BC ped. 2 $\frac{1}{2}$; recte quidem aream erues, ſi ambas magnitudines reductas ad homogeneas, nempe AB ad 4, & BC ad 5 Semipedes; habebisque facta Multiplicatione 20 quadrata Semipedalia. At cave, ne iſta reducturus ad integri pedis quadrata, dividas Totum 20 per 2. Nam unum pedis quadratum (quale ponimus eſſe A*x* in Fig. 152) minime continet duos, ſed quatuor Semipedes quadratos, uti Figura ipſa monſtrat. Unde diviſio per 4 inſtituenda. Simili cautela maxime opus eſt in ſimilibus caſibus.

PROBLEMA II. Tab. VI. Fig. 149.

§. 207. *Aream Parallelogrammi obliquanguli* ABCD *invenire*.

Duc Baſin in Altitudinem, prodibit Area. Eſt enim AC = Bn Rectangulo *. *Pr. II.

Sic ſi AB ſit = 271'', & Bm = 1232'''; area erit 3, 33, 87, 20 linearum quadratarum; vel 3 Decemped. quadr. 33 ped. quadr. 87 poll. qu. 20 lin. qu.

PROBLEMA III.

§. 208. *Aream cujusvis Trianguli* ABC *reperire*. Fig. 152. & 153.

Duc Baſeos AB ſemiſſem Am in Altitudinem Co; & habebis Aream.

DEMONSTR. Tale Triangulum eſt dimidium Rectanguli ejusdem Baſeos & Altitudinis. At Rectanguli ſemiſſis producitur ſecundum præſcripta. Ergo.

SCHOL. Eandem Trianguli Aream elicies, ſi ducas Totam Baſin in Altitudinis dimidium: item ſi productum ex Baſi in Altitudinem dividas per 2. Altitudo autem reperitur vel ope Scalæ vel Trigonometrice per §. 137.

PROBLEMA IV.

§. 209. *Polygonum Regulare metiri*.

Polygoni Perimeter ducta in ejus dimidiam Altitudinem, producit Aream. Patet ex Prop. 21. & Probl. præced.

PROBLEMA V.

§. 210. *Trapezium, vel Polygonum irregulare metiri*. Fig. 150. & 145.

Reſolve Trapezium, vel Polygonum in tot, quot potes, Triangula. Quære Triangulorum Baſes & Altitudines, & ex his iſtorum Areas.

Tab. VI. Triangulorum ſumma dabit Totum Trapezium vel Polygonum.

SCHOLION I. Cum in Campis ægre perficiatur Trapezii in Triangula reſolutio & Altitudinum menſuratio; in accurati horum Ichnographia perficiantur iſthæc.

Fig. 141. SCHOL. II. Ut invenias Aream figuræ irregularis & mixtilineæ *hknopqsg*, metire *primum* Aream Rectilinei circumſcripti ABCDE. *2do.* Ubi lineæ curvæ occurrunt, accipe ex iis partes haud multum differentes a rectis, & metire Triangula *hk*B, *fg*A, *rs*E; *qp*D, *pa*D &c. eaque ſubtrahe ex toto Rectilineo; relinquetur Mixtilineum. *Vel*, ubi commodum fuerit, accipe intra

*Fig. 143. Aream * A*fg*C*abcd*D, maximum, quod potes, quadrilaterum ABCD, ex cujus lateribus duces perpendiculares ad angulos agri; ut reſidua extra quadrilaterum exiſtentia reſolvantur in Triangula aut Trapezia, huic poſtmodum adjicienda.

SCHOLION III. Obſervandum, in ſuperficie montis non poſſe plures arbores, ſegetes, ædificia &c. erigi atque in ipſa montis planitie Horizontali, cui mons inſiſtit, ut vel ex unius Figuræ 140. contemplatione intelligi poteſt. Cum igitur ad ſcopum Agrimenſorum ſolum faciat, noſſe planitiem illam Horizontalem montis, collis, aut cujusvis loci editioris: id aſſequuntur, dum montem circumeunt non ſecus ac alium locum planum impervium, ut §. 195. dictum; & nulla habitæ altitudinis ratione plani illius tum Ichnographiam tum Planimetriam conficiunt.

PROBLEMA VI.

§. 211. *Circuli Aream invenire.*

Peripheriam duc in ſemiſſem Radii, & habes Aream.

DEMONSTRATIO liquet ex Prop. 22. & Probl. III. *Vel*. Totum Radium ducito in dimidium Peripheriæ. Sic ſi Circuli Radius ſit 100′, erit ejus Area 7850′ q*u*.

Fig. 159. §. 212. SCHOLION. Invenies *Sectorem* ADBC, ſi Peripheriæ portionem ADB ducas in ſemiſſem Radii. *Segmentum* vero ABD invenies, ſi ab invento Sectore ACBD ſubtrahas Aream Trianguli ABC.

ARTICULUS II. Tab. VI.

Figurarum Planarum in alias æquales transmutatio.

PROBLEMA I. *E.I.24.

§. 213. *Triangulum quodvis* ABC *convertere in æquale Rectangulum* Ax. Fig. 152. & 153.

Baſin AB biſeca in *m*. Rectangulum *mx*, ſub dimidia baſi & Trianguli altitudine, eſt huic æquale, *per Prop*. 13.

Corollarium. Viciſſim Rectangulo *mx* conſtitues æquale Triangulum; ſi tale erigas ſuper baſin duplicatam, i.e. ſuper AB & ſub illius altitudine.

PROBLEMA II. E.I.44.

§. 214. *Triangulum* ABC *convertere in æquale Parallelogrammum, quod habeat longitudinem datam* rs, *ſub angulo dato* x. Fig. 146.

Triangulum convertatur in æquale Parallelogrammum * A*mro* ſub angulo *o*A*m* = *x*. *§.213. Productis lateribus A*o*, *mr*, fiat Parallelogrammum *ru* ſub datâ longitudine. Ducatur Diagonalis *son* & compleantur circa hanc Parallelogramma A*t*, *fo*. Erit *fo* petitum, quia æquale ipſi A*mro* * = ABC, & angulus *m*A*o* = *rou* = *otf* *. *Pr.14. *Pr.6.

PROBLEMA III.

§. 215. *Rectangulo oblongo* AC *æquale Quadratum conſtruere*. Fig. 155.

Altitudinem BC adjice in directum Baſi AB, ut fiat AL. Hanc AL biſeca in M, & duc

Tab. VI. Radio MA Semicirculum; ad cujus peripheriam produc latus BC, ut fiat BR, cujus Quadratum æquatur Rectangulo AC.

*Pr. 27. Cor. *Pr. 29. DEMONSTR. LB, BR, BA ſunt tres continue proportionales *. Ergo Rectangulum ſub extremis, i.e. AC, æquatur Quadrato Mediæ BR *.

SCHOLION. Omnem nunc Figuram rectilineam, ſcies mutare in Quadratum. Nam Triangulum converte in æquale Rectangulum hoc in Quadratum. Trapezium aut Polygonum reſolve in Triangula, ſingula converte in Quadrata, ex his fac unum omnibus æquale, per *Prop*. 15. *Cor*. 2. vel ex Totius Polygoni Summa extrahe Radicem quadratam, quæ dabit latus Quadrati.
*E. l. 45. * Scies quamvis Figuram rectilineam convertere in æquale Parallelogrammum ſub datâ aliqua linea & dato angulo.

PROBLEMA IV.

§. 216. *Circulo æquale Triangulum aut Quadratum exhibere.*

Fiat Triangulum rectangulum, cujus baſis ſit ipſa peripheria, Altitudo Radius: erit hoc æquale Circulo, *per Prop*. 22. Iſtud converte in æquale Rectangulum, hoc in Quadratum, per §§. 213. 215.

Sit Radius 60 particularum Scalæ; erit Peripheria
*§. 179. $376\frac{4}{5}$ *p*. *, quam pro baſi accipe; cui adjunge Cathetum 60 particularum, & Triangulum comple.

Patet, quomodo Sector, Segmentum circuli valeat mutari in figuram aliam.

PROBLEMA V.

§. 217. *Quodvis Quadratum* (e.g. 2003 pedum quadratorum) *convertere in æqualem Circulum.*

Fiat: ut 7850 ad 10000, ita datum 2003 ad 2551, Hujus Radix 50 dat Diametrum Circuli continentis 2003′ q.

Demonstr. Ut Circulus ad Circulum, ita Quadratum ſuper Diametrum primi Circuli ad Quadratum ſuper Diametrum ſecundi *; & *alternando*, ut Circulus A ad Quadratum ſuæ Diametri, ita Circulus B ad Quadratum Diametri ſuæ. Sed Circulus, cujus Diameter eſt 100, habet Aream = 7850, & Diametri Quadratum eſt 10000. Ergo per Regulam auream, dum tertius proportionalis 2003 habetur pro Area Circuli, quartus largitur Quadratum Diametri ejusdem Circuli. Proinde hujus Quadrati Radix dabit Diametrum, & hujus Semiſſis Radium, quo Circuli iſtius peripheria ducenda. *Quomodo accuratior Diameter elicienda, docet Arithmetica Cap. 4. pag. 90.* Tab. VI. * Pr. 31. Cor. 1.

ARTICULUS III.

Gæodeſia.

Gæodesia eſt diviſio Plani in partes quasvis vel æquales vel in data Ratione.

PROBLEMA I.

§. 218. *Parallelogrammum quodvis* (AC) *dividere in quotlibet partes æquales*, e.g. *tres*. Fig. 156.

Divide baſin in partes deſideratas (3). Duc ad BC parallelas *mn*, *rs*. Erit factum. Patet ex Prop. 11.

PROBLEMA II.

§. 219. *Trapezium, quod habet duo latera oppoſita parallela, dividere in partes æquales* v.g. 3. Fig. 157.

Tab. VI. Divide utramque parallelam in partes 3: & puncta diviſionum conjunge lineis *rs*, *mn*. Dico, factum.

DEMONSTR. Ductis Diagonalibus A*r*, *sm*, *n*C, æqualia ſunt inter ſe Triangula A*sr*, *snm*, *n*BC *; ſimiliter Triangula D*r*A, *rms*, *m*C*n*. Igitur ſi cuivis Triangulorum priorum addas unum poſteriorum; plana inde reſultantia D*s*, *rn*, *m*B ſunt æqualia.

*Pr. 12.

PROBLEMA III.

Fig. 158. §. 220. *Dividere Parallelogrammum quodvis* ABCD *ex dato puncto* E, *in partes v.g. tres.*

Divide *per Probl. I.* Parallelogrammum in partes æquales A*r*, *sm*, *n*C; & per parallelas *rs*, *mn*, in *o* biſectas, duc ex E rectam E*of*, & *rog*. Erunt A*f*ED, E*g*, *g*BC*r*, æqualia.

*Pr. 3. DEMONSTR. Triangula *ro*E, *mor*, *nog*, *sof* ſunt æqualia *. Ergo A*so*ED † *ro*E ≍ A*so*ED † *sof*, i.e. A*fo*ED ≍ A*r* parti tertiæ. Sic etiam *g*BC*r* ≍ B*m*; & *g*E ≍ *nr*.

PROBLEMA IV.

Fig. 160. §. 221. *Triangulum* ABC *dividere in partes quotvis æquales, e.g.* 3. II. *Idem dividere in totidem partes ex dato puncto* D.

I. Ex Baſis trifariam ſectæ punctis *m*, *n*, duc rectas ad C. Erit factum *per Prop.* 12. *Cor.* 2.

II. Divide Triangulum trifariam ſecundum mox dicta, nempe in A*m*C, *mn*C, *n*BC. Duc rectam DC, & huic parallelas *mp*, *nq*. Conjunge *p* & *q* cum dato puncto D: orientur æqualia plana AD*p*, *p*D*q*C, *n*B*q*.

DEMONSTR. Æqualia ſunt Triangula mpC; pmD*: ergo ſi addas utrique partem Amp; eſt $ADp = AmC$. Unde ut AmC, ita & ADp eſt totius $\frac{1}{3}$. Pariter ſi æqualibus nqD, qnC, addas nBq; erit $DBq = nBC$, adeoque & hoc poſtremum Totius una tertia. Reſtat igitur, ut & $pDqC$ ſit Totius $\frac{1}{3}$. Tab. VI. * Pr. 12.

Plures Caſus & modos dividendi Triangulum in partes æquales, aut pro Ratione data, videre licet apud P. Schottum in Curſu Mathem. & Pantom. Kirch., apud P. De Chales, P. Taquet Geom. Pract. Verum his omiſſis, unum explico Problema, utilitate his omnibus antecellens, & Practicæ Geometriæ commodiſſimum.

PROBLEMA V.

§. 222. *Planum rectilineum* ABCDEF *in partes quotvis æquales, v.g.* 3. *dividere.* Fig. 144.

Hæredes 3 cupiant ſibi Pratum AD dividi in tres partes æquales, figuram Parallelogrammi aut Trapezii potius quam Trianguli referentes. I^mo^. Præmiſsâ accuratâ Prati Ichnographiâ, quære hujus Totam Aream, quam ponemus eſſe 15546 Decemp. quadr. Hujus numeri accipe partem tertiam $= 5182^{01}$. II^do^. Ichnographiæ Aream divide in 3. partes, Br, sm, nF, ſecundùm oculorum judicium circiter æquales, & habentes Figuram Hæredibus lubitam. Examina nunc & quære Aream ipſius Br, quæ ſi ſit e.g. 4441^{0}, adeoque a vera deficiat 740 Decempedis quadr. adjice ipſi Br, aliam partem $sabr$, ejusque aream indaga, quam ſi invenis eſſe 602 Decemp. qu., deficient nunc adhuc ad complendam unam Areæ tertiam 138 Decempedæ qu.,

Tab. VI. quem parvum defectum adjice in parvo aliquo Triangulo *abx*, hac via reperiendo. Explora per Scalam baſin *ab*, quæ ſi fuerit = 88′, divide per ejus Semiſſem (44) Trianguli aream 138; quotus ($3\frac{3}{22}$) dabit altitudinem *bx*, *ut patet ex* §. 208. & *Arithm. Prop.* 10. Ductâ igitur *xa*, habes nunc BCD *ba*, partem Totius tertiam. Pari modo circa reliqua operare. Demum inventis in Charta partibus fac in Campo alias inventis ſimiles *.

* §. 202.

Si pars circiter tertia (B*r*) deprehendatur eſſe verâ major; erit ſecundum tradita auferendum, quod redundat. Sæpe etiam ſubſidio venient & operationes facilitabunt Problema I. II. IV.

GEOMETRIÆ Tab. VII.

PARS III.

De Solidis.

CAPUT I.

Solidorum Theoremata præcipua.

§. 223. Solidorum doctrinam Veteres muniverant Demonſtrationibus ſolidis quidem & pro more ſuo firmis, verum adeo prolixis & arduis, ut via ad Stereometriam nonniſi Herculeis animis pateret. Recentiorum laus eſt, quod argumentum iſtud & breviùs & faciliùs abſolvant. Quanquam inter hòs nonnullos reperiam minus appoſite in hac materia verſatos, ùt qui vel Paralogismos, vel demonſtrationes admodum infirmas, & Apodixeon umbras magis quam veritates propoſuerunt.

Facilitatem maximam in Stereometriam invexit Sæculo ſuperiore *Methodus Cavalleriana*, nomen ſortita ab Authore Bonaventura Cavallerio, Mediolanenſi, ex Ordine Jeſuatorum. In hac Methodo Lineæ conſiderantur longæ quidem, ſed habentes aliqualem latitudinem etſi tenuiſſimam & infinite parvam. Linea hujusmodi conci-

Tab. VII. pitur dividi in partes minutiſſimas æquales; quas ſi vereare puncta dicere, lineæ Elementa compellabis. Ex lineis iſtis juxta ſeſe poſitis tanquam totidem Elementis conflatur *ſuperficies*. Hinc apud Cavallerium continuo *Fig. 161. patet, Parallelogramma * AC, BD, æqualium Baſium & Altitudinum, eſſe æqualia: ſi enim Altitudo AL contineat e.g. 1000 puncta vel elementa; & totidem lineæ, ipſis AB, BP æquales, concipiantur juxta ſeſe poni, ut planum efficiant: duo hæc plana ex æquali partium æqualium numero compoſita, neceſſario erunt æqualia. Porro ex iſtiusmodi ſuperficiebus tenuiſſimam craſſitiem habentibus, tanquam elementis, Cavallerio *Corpus* componitur. Cavalleriana iſthæc ſolet etiam dici Methodus *Indiviſibilium*, tum quod Author ipſe Elementis ſuis indiviſibilium nomen indiderit, tum quod habitis & poſitis hiſce elementis abſtrahatur ab eorum partibus. Hæc ipſa Methodus a multis impugnata, a multis contrà defenſa, laudata & exculta hucusque fuit. Si meum liceat interponere judicium, cenſeo illam ſatisfacere Geometriæ Practicæ eousque, ut nec in dimenſionibus Planorum ſecundùm Areas, nec in menſuratione Corporum Phyſicorum ſecundum molem ſenſibiliter aberremus a vero, in determinandis autem Planorum perimetris & corporum, maxime rotundorum, ſuperficiebus caute eſſe uſurpandam. In præſente Stereometria, Methodo Cavalleriana non utemur, niſi cùm difficiliori demonſtrationi faciliorem ſubſtituendam exiſtimabimus.

DEFINITIONES.

Fig. 162. §. 224. DEFINITIO I. **Duo plana (MN, PQ) ſunt ad ſeinvicem *parallela*, ſi æqualibus intervallis diſtent.**

Æqualia autem intervalla deſumuntur a tribus ſaltem lineis Perpendicularibus (*ab*, *cd*, *ef*) æqualibus, non in directum poſitis, ex uno plano ad oppoſitum pertingentibus.

Item ſi Parallelogrammum quoddam *acdb* uno ſui latere *ac* inſiſtat Plano MN, & ſervans eandem ad iſtud

inclinationem moveatur ſuper MN; deſcribet recta *bd* Tab.
planum, æqualiter diſtans ab MN. VII.

§. 225. DEFINITIO II. *Angulus ſolidus* rectilineus eſt, qui ſaltem tribus planis angulis, non in eodem plano exiſtentibus, continetur.

Sic Angulus ſolidus G Cubi AH * componitur ex 3 * Fig.
Angulis planis; & angulus ſolidus Pyramidis ad C ex 5 167.
planis. Fig. 170.

SCHOL. Omnes plani Anguli, ſolidum quemcunque An- E. XI.
gulum componentes, ſunt minores 4 Rectis, ut demonſtrat Eu- 21.
clides L. 11. Prop. 21.

§. 226. DEFINITIO III. *Priſma* eſt ſo- Fig.
lidum, cujus duæ baſes oppoſitæ (X & Z) 163.
ſunt plana parallela & per congruentiam æqualia, plana vero lateralia ſunt Parallelogramma.

A Baſi Triangulari, dicitur Priſma *Triangulare*; a Quadrilatera, Polygona, dicitur *Quadrilaterum*, *Polygonum*.

SCHOL. Non ſufficiebat dicere, Priſmatis baſes eſſe quomodocunque æquales, quales etiam eſſe poſſent per Propos. 12, etiamſi forent diverſimode figuratæ; ſed requiritur, ut ſint æquales ſimul & ſimiles, proinde tales, quæ mutuo congruant.

§. 227. DEFINITIO IV. *Parallelepipe-* Fig.
dum eſt ſolidum terminatum 6 Parallelogram- 167.
mis, quorum quælibet bina oppoſita ſunt & 168.
parallela & per congruentiam æqualia. *Cubus* eſt Parallelepipedum Rectangulum conſtans 6 planis quadratis & æqualibus. Plana Parallelogramma vocantur *Figuræ ſolidæ latera*.

§. 228. DEFINITIO V. *Pyramis* eſt ſo- Fig.
lidum habens baſin planam vel Triangularem, 166.
vel Quadrilateram, vel Polygonam, e cujus 170.
lateribus aſſurgunt Triangula in unum apicem coëuntia.

Tab. VII. Fig. 164. §. 229. DEFINITIO VI. *Cylindrus* eſt ſolidum contentum intra duas baſes circulares, æquales, parallelas, & intra ſuperficiem columnarem, quæ ab unius baſeos peripheria ad oppoſitam extenditur.

Fig. 165. *Conus* eſt ſolidum, contentum intra baſin Circularem & ſuperficiem coniformem, quæ nempe ex baſeos peripheria in Coni apicem deſinit.

Fig. 164. *Axis Cylindri* vocatur recta *oe* vel *xz*, ducta ex baſeos unius centro ad centrum alterius. *Axis Coni* eſt recta, ex apice ad baſeos centrum *o* ducta. *Fig.* 165.

§. 230. DEFINITIO VII. *Sphæra* eſt ſolidum contentum intra ſuperficiem perfecte rotundo-convexam.

§. 231. GENESIS ſolidorum ita concipitur. Si baſis Prismatis aſcendat motu ſemper parallelo ac uniformi vel per lineam, vel per planum (quod baſeos latus aliquod ſtringat, ſitque ad baſin vel Perpendiculare vel obliquum); generatur in primo caſu *Prisma Rectum*, in altero *Obliquum*. Si Quadratum perpendiculariter aſcendat ad altitudinem lateris alicujus; generabit *Cubum*. II. Si Circulus aſcendat per axem perpendicularem, generatur *Cylindrus Rectus*; ſi per obliquum, *Obliquus*. III. Si Triangulum rectangulum circa Cathetum *co* * in orbem volvatur; generat *Conum rectum*. IV. *Sphæra* gignitur ex circumvolutione Semicirculi *adb* circa Diametrum *ab*. Unde patet, omnes lineas a Sphæ-

* Fig. 165.

Fig. 178.

ræ centro ad ſuperficiem ejus convexam ductas, eſſe æquales. Tab. VII.

§. 232. Ex hac Geneſi, rite conſiderata, conſequitur Definitionum ſuperiorum poſſibilitas. Nam I^mo^ patet, in quovis Priſmate baſes oppoſitas eſſe æquales, cùm ſuperior non differat ab inferiore niſi ſecundum locum.

II^do^ patet, Priſmatis quodvis latus, v.g. AC, eſſe Parallelogrammum: Nam ob parallelas & æquales AB, GC, æquantur anguli CGB, ABG, atque hinc per Propos. 2. Triangula ABG, CGB, horumque anguli congrui AGB, CBG; proinde & AG, BC, parallelæ * ſimul & æquales * ſunt. Ergo. Fig. 168. * *Pr.* 6. *p.* 2. * *Pr.* 9. *Cor.* 2.

III. Quando Priſmatis baſis eſt Parallelogrammum; generatur Parallelepipedum. Nam *primo* * plana quævis oppoſita (v.g. AC, LH) æqualia & congrua ſunt: etenim ex num. præced. eſt GA ⫩ CB ⫩ HE ⫩ DL; igitur ſi concipiatur Planum LH accedere motu æquabili per rectas itidem æquales * DG, HC, LA, EB; neceſſe *eſt*, ut congruant AC, LH. 2do: Parallelismus quorumvis oppoſitorum laterum, (v.g. AC, LH) efficitur ab ipſa baſi generante, cujus æquidiſtantes lineæ AB, LE, faciunt & ipſa plana (AC, LH) abs ſeſe generata ubivis æquidiſtare *. * Fig. 168. E. XI. 24. * *Pr.* 9. * *Def.* 1.

IV. *Si* eadem Baſis AE, generans duo Parallelepipeda, AH, AT, in gemino aſcenſu ſuo ſtringat idem planum v.g. GA*p*N, adeo, ut latera BG, AN, in hoc exiſtant: etiam oppoſita plana LH, LT, exiſtent in eodem plano DL*q*T. Si enim aliter eſſet; baſes GH, MT, æquales & congruæ inter ſe (*quia congruæ cum tertia* AE *) non eſſent tales. Fig. 171. * *num.* 1.

§. 233. DEFINITIO VIII. *Altitudo* Priſmatum & Cylindrorum, eſt Perpendicularis, ducta ex baſium una ad oppoſitam, quandoque (cum neceſſe fuerit) productam. Altitudo Pyramidum & Conorum eſt Perpendicularis ex Apice demiſſa in baſin.

NOTA.

Tab. VII. §. 234. Fit nonnunquam, ut difficultatem non mediocrem ſentiat Tiro in capiendis nonnullis Propoſitionibus, quales apud nos occurrunt 37. 39na &c. eo quod Figuræ in Charta delineatæ excitent minus appoſitam illius ſolidi, de quo agitur, ideam. Eam ob rem fac ad manum habeas ſolida corpora ex ligno vel argilla, vel alia materia fabricata. Ex his enim demonſtratio prona & ocularis evadet. Quomodo in charta craſſiore delineanda ſint retia ac figuræ quædam planæ, ex quorum complicatione exurgant corpora ſolida, e.g. Parallelepipedum, Cubus, Priſma, Pyramis, Cylindrus, Conus Rectus &c. docent paſſim Authores, ut P. De Chales, Sturmius, Wolffius, Pentherus, Hederich &c.

Corpora dividi etiam ſolent in Regularia & Irregularia. *Regularia* ſunt, quorum ſuperficies conſtant figuris planis per congruentiam æqualibus, & angulis ſolidis æqualibus. Nonniſi quinque dantur; nempe 1. *Tetraëdrum*, contentum ſub 4 ΔΔ æquilateris. *Fig.* 193. 2. *Hexaëdrum*, ſeu Cubus, ſub 6 æqualibus Quadratis, 3. *Octaëdrum*, ſub 8 ΔΔ æquilateris. *Fig.* 194. 4. *Dodecaëdrum*, ſub 12 Pentagonis regularibus. *Fig.* 188. 5. *Icoſaëdrum*, ſub 20 ΔΔ æquilateris æqualibus. *Fig.* 187. Hæc omnia corpora Sphæræ poſſunt inſcribi.

Cur autem non plura quam 5. ſint poſſibilia, ex anguli ſolidi natura deducitur. Quomodo itidem retia pro iſtis deſcribenda ſint, docent iidem Authores.

AXIOMATA.

§. 235. I. Corpora compoſita ex partibus æque multis, & mutuo æqualibus (h. e. in quibus pars prima primæ, ſecunda ſecundæ &c. æquatur) ſunt æqualia.

II. Corpora ab eadem Magnitudine genitrice eodem motu aut modo generata, ſunt æqualia.

III. Solida, quæ congruunt, ſunt æqualia. *Dicuntur autem congruere, ſi, dum compenetrata concipiuntur, ſeſe non excedant.*

IV. Sicut ſe habent Tota, ita eorum partes dimidiæ, tertiæ, quartæ &c.

Solidorum figuras indicabimus deinceps vel per binas ſolum adſcriptas literas; vel ſi plures duabus compellaverimus, primæ baſin notabunt.

PROPOSITIO XXXV.

Tab. VII. Fig. 169.

§. 236. *Pyramidum Triangularium* (ABCP, ABC*p*) *eandem Baſin & Altitudinem habentium, Sectiones Triangulares* (MNR, mnr) *parallelæ ad baſin, & æque altæ, ſunt æquales.*

Demonstratur. Altitudines ſeu Perpendiculares æquales ſint PQ, & *pq*. Ducantur ad has Rectæ AQ, MO; item A*q*, *mo*, per plana triangularia tranſeuntes, atque hinc & ipſæ inter ſe parallelæ. Jam vero cùm hîc occurrant plura Triangula ſimilia; eſt *: *Pr. 25.

PQ:PO::QA:OM::PA:PM::AB:MN;
&*pq*:*po* :: *q*A : *om* :: *p*A : *pm*::AB: *m n*.

Ergo cùm omnes iſtæ utriusque ſeriei Rationes ſint æquales inter ſe; Proportionem conſtituunt * extremæ: nempe *primo* ùt PQ ad PO ita AB ad MN; 2*do* ùt *pq* ad *po*, i.e. PQ ad PO ita AB ad *mn*. Igitur æquales ſunt Rectæ MN, *mn* *. Eodem modo oſtendo, æquari inter ſe NR & *nr*; MR & *mr*; proinde & ipſa Triangula * MNR, *mnr*. *Q.e.d.* *§. 89. Ax. 4. *§. 89. Ax. 3. *Pr. 5.

§. 237. Scholion. Eâdem demonſtratione adhibitâ ſequitur, Sectionem quamvis (ùt AB, *Fig*. 170.) baſi parallelam, eſſe baſi ſimilem. Sequitur hinc 2*do*. ſi Pyramidum (*Fig*. 170.) CD, *cd*, æque altarum Baſes D & *d* ſint æquales, eſto non ſint ſimiles; etiam Sectiones parallelas & æque altas AB, *ab*, eſſe æquales. Cùm enim utrimque Sectio quævis ſit ſimilis ſuæ Baſi, ſitque ad iſtam in Ratione Duplicata homologorum laterum, vel etiam Altitudinum (CD, CO; cd, co); hæ autem Altitudines utrimque æquales inter ſe ſint, patet propoſitum.

Tab. VII. Fig. 169. PROPOSITIO XXXVI.

§. 238. *Pyramides Triangulares* (ABCP, ABC*p*) *ejusdem Baſeos & Altitudinis, ſunt æquales.*

DEMONSTRATUR. Cogita utramque Pyramidem, ſectionibus ad baſin parallelis, ſectam in tot infinite tenues lamellas triangulares, quot ſunt puncta vel elementa in earum Altitudine. Erunt, ob eandem altitudinem, utrimque æque multa Triangula; & quævis Triangula a baſi æque remota erunt æqualia *. *Pr. 35. Ergo hæ Pyramides, compoſitæ ex æquali numero partium æqualium, ſunt æquales *. *Ax. 1. *Q. e. d.*

§. 239. SCHOLION. Pro uberiore datæ demonſtrationis explicatione obſervandum, Propoſitionem 35. procedere quidem ſolum de ΔΔ, quæ tanquam meræ ſuperficies craſſitie careant; ſed tamen applicari illam etiam poſſe noſtris lamellis triangularibus; tum quia hæ a dictis Triangulis differunt defectu infinite parvo ſeu, in ordine ad praxin, nullo; tum quia illæ lamellæ conſiderari poſſunt inſtar Priſmatum triangularium, habentium baſin illam in Propoſitione præced. memoratam, & eandem altitudinem ſed infinite parvam. Hujusmodi autem Priſmata æqualia eſſe, patebit in Propoſit. 39. parte 2. *Dices*: Si Pyramis ex Priſmatibus componitur; igitur ejus ſuperficies laterales, (v.g. ABP) non ſunt planæ, ſed veluti gradibus interruptæ. Reſpondeo, gradus hoſce minimos a continua ſuperficie phyſice indiſcernibiles eſſe, proinde Figuram efficere Pyramidi æquivalentem. Nam ſi pro Pyramide * ABC accipias duo Priſmata, *x*, *z*, huic inſcripta, vel tria circumſcripta; hæc componerent utique figuram notabiliter a Pyramide differentem. At ſi loco duorum triumve Priſmatum accipias octo alia minora, ut fit in BDE; hæc multo

* Fig. 181.

jam propius Pyramidem referent: ac ſi porro Prismata conceperis ſine fine plura & infinite parva, hæc tandem in ipſam Pyramidem deſinent. Tab. VII.

PROPOSITIO XXXVII. E. XII.

§. 240. *Pyramis* (ABCD) *habens eandem baſin & altitudinem cum Prismate Triangulari* AE, *eſt hujus pars tertia*. II. *Et Conus* aic *habens eandem altitudinem & baſin cum Cylindro* an, *eſt tertia pars iſtius*. Fig. 165. 7. 10. Fig. 173.

DEMONSTR. I. *Pars*. Duc in lateribus Parallelogrammis tres Diagonales AD, DC, FC. Licet nunc conſiderare duas Pyramides ABDC, AFDC: ſed hæ ſunt æquales.*, * *Pr.36.* utpote habentes æquales baſes * & eandem altitudinem, ex apice communi C in planum * *Pr.9.* BF ducendam; *Secundo*. Pyramis poſterior AFDC nunc inſiſtens baſi FCA eſt æqualis Pyramidi FCED (ob baſes rurſus æquales, & eandem altitudinem ex vertice D in planum FC demittendam). Ergo Pyramides prima & tertia, æquales mediæ, ſunt æquales inter ſe. Proinde Prisma quodvis triangulare ſecari poteſt in tres Pyramides æquales, ut adeo Pyramis ABDC ſeu ABCD ſit tertia pars Prismatis AE. *Q. e. d.*

DEMONSTRATIO II. *Partis* commodius dabitur in §. 243.

PROPOSITIO XXXVIII.

§. 241. *Parallelepipedum* AH *ſecatur per planum Diagonale* CDLB *in duo Prismata Triangularia æqualia* LBH, LBG. Fig. 167.

Tab. VII. DEMONSTRATUR. Hæc duo Priſmata congruunt. (*Nam ſi ſecundum intelligatur compenetrari cum primo, congruent latera AC,* *Def. 4. vel §. 232. n. 3. *LH, utpote æqualia *: unde & reliqua plana extrema congruent; ſecus enim aut plana, quæ ex Definit. 4. æqualia ſunt, forent inæqualia; aut* *Pr. 9. vel 5. *æquales anguli *, CGD, DHC, aliique ſimiles, forent inæquales*). Ergo ſunt æqualia.

Vel demonſtra Propoſitionem ex Axiom. 2, eoquod æqualia baſeos Triangula generant æqualia Priſmata.

NOTA. *Si amas ſequentis Propoſitionis Demonſtrationes breviores, vide tales in §. 244.*

PROPOSITIO XXXIX.

§. 242. *Ejuſdem baſeos & altitudinis Pa-* *E. XI. 29. 30. 31. *rallelepipeda *. II. Priſmata. III. Cylindri. IV. Coni, æquantur inter ſe.*

DEMONSTRATUR I. *Pars* inſtar Propoſitionis 11ma. *Fig. 171. * Nam ſi *primo* Parallelepipeda AH, AT, contineantur inter eadem plana NGAp, TDLq; erunt Priſmata triangularia GAMV, CBNT æqualia (*id quod ex congruentia probabis, ut in Demonſtratione præcedente factum.*) Igitur ſi ab his auferas commune Priſma triangulare COMV, & addas utrique aliud OBAL: prodibunt dicta Parallelepipeda, eaque æqualia. *Secundo.* Si duo Parallelepipeda (*ut in Fig.* 175.) AH, AT, non exiſtant intra eadem plana; concipi poterit Parallelepipedum tertium AQ, quod ſit; & cum primo AH intra eadem plana NA,

QL;

QL; & cum altero AT intra idem planum TNBE: unde & vi geneſis *, latera VA, ML, in eodem plano exiſtunt. Jam vero primum AH nunc eſt æquale tertio AQ, & hoc alteri AT (*per Demonſtrationem mox datam*). Ergo & æqualia ſunt ipſa AH, AT. *Q. e. d.* Tab. VII. * §.230. n.4.

DEMONSTRATUR II. *Pars.* Si *primo* Prismata ABEH, ABEN ſint triangularia: concipiatur, baſi ABE adjici æqualem ELA, ita ut BL evadat Parallelogrammum, quod dum aſcendendo, unâ ſui parte ABE, generat dicta Prismata, totum generabit Parallelepipeda AH & AT: ſed hæc ſunt æqualia *, ac dupla dictorum Prismatum *. Ergo & ipſa Prismata ſunt æqualia, *per Ax.* 4. *Secundo.* Si Prismata ſint Quadrilatera vel Polygona; reſolvatur baſis in Triangula: & patebit ex modo dictis, bina quævis Prismata eidem Triangulo inſiſtentia eſſe mutuo æqualia; demum (*per* §.235. Ax. 1.) Summam Prismatum partialium, unum Totale conſtituentium, æquari Summæ Prismatum partialium in altero Totali. Fig. 172. * *per part.* 1. * *Pr.* 38.

DEMONSTRATUR III. *Pars.* Si eandem utrinque baſin circularem concipias ut Polygonum regulare multorum laterum, diviſibile in totidem Triangula æqualia *: æquivalebit tam Cylindrus *ap*, quam *mq* Prismati multilatero. Sed hujusmodi Priſmata eandem baſin habentia ſunt æqualia, *per partem* 2. Ergo & Cylindri. *Q. e. d.* Fig. 164. * *Pr.* 21. *Cor.* 1.

Tab. VII. Sic Priſmatulum triangulare *aboe* ≅ *mnxz*; & *bcoe* ≅ *nrxz*, & ſic de aliis priſmatulis utrimque æquali (ut ſupponitur) numero poſitis. Ergo & horum utrimque Summæ æquantur.

Fig. 165. DEMONSTRATUR IV. *Pars*. Concipe rurſus Conorum *aic*, *mgr*, baſin ut Polygonum regulare infinitilaterum, in infinita Triangula æqualia & æque multa diviſum: erunt utrimque binæ quævis pyramidulæ, eidem * Pr. 36. Triangulo inſiſtentes æquales inter ſe *. Quare Summa pyramidularum unius figuræ erit æqualis Summæ pyramidularum alterius figuræ, i.e. Conus Cono. *Q. e. d.*

Fig. 165. §. 243. COROLLARIUM. Si in Coni *aic*, baſi *ai*, inſtar Polygoni conſiderata, excitetur Cylindrus *an*: æquivalebit Cylindrus Priſmati infinitilatero, compoſito ex tot æqualibus priſmatulis triangularibus, quot ſunt Triangula in baſi. Jam vero cùm ſingulis baſeos Triangulis inſiſtant pyramidulæ, quæ ſimul ſumptæ ipſum Conum componunt, quævis autem pyramidula tertia pars ſit priſ- * Pr. 37. p. 1. matuli, quod ſecum eidem triangulo inſiſtit*: erit complexum ex omnibus pyramidulis pars tertia complexi ex omnibus priſmatulis, i.e. Conus eſt tertia pars Cylindri, ejusdem ſecum baſeos & altitudinis.

§. 244. SCHOLION. In methodo Cavalleriana expeditius & brevius, ſed minore rigore, demonſtratur Propoſitio in hunc modum. I. In Parallelepipedis, ab eadem baſi generatis, concipiantur tot lamellæ tenuiſſimæ, ad baſin parallelæ, quot ſunt puncta in Altitudine. Erunt utrimque *primo* æque multæ lamellæ, 2*do* æquales omnes inter ſe; cùm unaquæque pro ipſa baſi haberi poſſit. Ergo æqualia ſunt ambo Parallelepipeda *per Ax.* 1. II. Ex eadem ratione æquantur duo Priſmata. III. Duo

Cylindri. IV. Demum & duo Coni, tanquam Pyramides infinitilateræ, *per Schol. Prop. 35.* Tab. VII.

PROPOSITIO XL.

§. 245. *Hemiſphærium eſt duæ tertiæ Cylindri ſibi circumſcripti, ſeu habentis eandem ſecum baſin & altitudinem.* Fig. 176.

Id eſt, BRCSK : KBDL :: 2 : 3.

Demonstratio. Si Quadrato AD inſcribatur Quadrans BRC, & Diagonalis AD, volvaturque Quadratum circa Axem AC: deſcribetur a Quadrato Cylindrus, a Quadrante Hemiſphærium, a Diagonali Conus inverſus. 2do. Ducatur IH parallela ad baſin, & Radius AR: æquabuntur inter ſe AB, OH, AR; pariter AO & ON (*Nam cùm ſit ùt AC ad CD, ita AO ad ON*, inter priora autem detur Ratio æqualitatis; dabitur etiam talis inter poſteriora*). 3^{tio}. Cogita tot plana Circularia, baſi parallela, eſſe deſcripta, quot ſunt puncta in AC. Accipiatur planum quodlibet v.g. IH: erit MN diſcus Coni; SR diſcus Hemiſphærii; IH diſcus Cylindri. Atqui iſti Circuli habent ſe adinvicem uti Quadrata ſuorum Radiorum ON, OR, OH*: ſubtracto autem AO^2 vel ON^2 ex AR^2 vel OH^2, remanet OR^2*, quadratum Radii in Hemiſphærico plano. Ergo etiam ſubtracto Coni Circulo MN ex Cylindrico Circulo IH, remanet SR Circulus Hemiſphærii. Et quoniam hoc valet de quavis ſectione ſimili; hinc omnibus Coni circulis ex Cylindro ſubtractis, manent omnes Hemiſphærii Circuli, hoc eſt,

* Pr. 25.
* Pr. 31. Cor. 1.
* Pr. 15.

Tab. VII. ſubtracto Cono ex Cylindro, manet Hemisphærium. Sed Conus eſt tertia pars Cylin-
§. 243. dri: Ergo tertia parte e Cylindro ſubtractâ remanet Hemisphærium, duæ tertiæ Cylindri. *Q. e. d.*

Fig. 178. §. 246. COROLLARIUM. Ergo Tota Sphæra O eſt duæ tertiæ Cylindri *mn*, habentis eandem cum Diametro Sphæræ altitudinem, & baſin æqualem circulo maximo Sphæræ. Circulus autem Sphæræ maximus eſt, qui per totum Radium deſcribitur, ideoque per Sphæræ Centrum tranſit, ac Sphæram ſecat in duo æqualia Hemisphæria.

Hoc Theorema primus invenit & demonſtravit Archimedes, tantique illud fecit, ut tumulo ſuo Sphæram Cylindro inſcriptam inſculpi voluerit.

PROPOSITIO XLI.

§. 247. *Sphæra eſt æqualis Pyramidi, quæ pro baſi habet ipſius Sphæræ ſuperficiem, & pro altitudine ſemidiametrum Sphæræ.*

DEMONSTRATUR. Concipe (*in Fig.* 177.) totam convexam Sphæræ ſuperficiem, diviſam in infinite parva quadrata, vel etiam Triangula, quorum quædam craſſe delineantur in *bcd*, *cerd* &c.; ſecabitur hoc modo tota Sphæra in plurimas pyramidulas (quales ſunt *bdca*, *cdrea* &c.) quarum altitudo ſit ipſe Radius, baſes vero nihil a plano deficient. Jam vero ſi hæ ipſæ baſes (quæ totam Sphæræ ſuperficiem componunt) conjungantur in unum pla-
*Fig. 179. num * ALBI, atque ita pyramidulæ e Sphæra exſectæ juxta ſeſe collocentur (*prout Figura* 179. *aliqualiter repræſentat*), tunc Pyramis

ALBC, habens pro baſi idem planum ALBI, & pro altitudine DC Radium Sphæræ, complectetur omnes illas pyramidulas ex Sphæra exſectas *, (nam eſt $Asrp \cong AsrC$; $rsoq \cong rsoC$ &c.) Ergo talis Pyramis ALBC æquatur ipſi Sphæræ. *Q. e. d.* Tab. VII. * Pr. 36.

PROPOSITIO XLII.

§. 248. *Parallelepipedi aut Priſmatis Recti, itemque Cylindri Recti ſoliditas eruetur, ſi baſis multiplicetur per Altitudinem.*

DEMONSTR. Ponamus, baſeos latus quodvis habere cum altitudine menſuram communem *. Sit proinde in Fig. 174. latus AB. 5, BC. 4 pedum, altitudo AD pariter 4 pedum. Fig. 174. * §. 87.

Igitur ſi baſis genitrix, continens 20 pedes quadratos aſcendat parallele per unum pedem; generabit quilibet pes quadratus unum pedem cubicum, & tota baſis 20 pedes cubicos. Si rurſus aſcendat baſis per unum pedem, generabit denuo 20 pedes cubicos: & ſic porro.

Ergo dum baſis aſcendet per totam altitudinem, generando totum Parallelepipedum; producit toties 20 cubos pedales, quot ſunt unitates in Altitudine. Unde ſoliditas Parallelepipedi habetur, ſi baſis ducatur in Altitudinem. *Q. e. d.*

De Cylindro & Priſmate recto idem patet, modo concipias baſin Priſmatis vel Cylindri æquivalere certo quadratorum æqualium numero; vel mutari in baſin parallelogrammam.

Diſcimus hinc, omnia Priſmata, etiam obliqua, quosvis Conos, Pyramides, ac Sphæras metiri; de qua re explicatius in Capite ſequ.

Tab. VII.

PROPOSITIO XLIII.

§. 249. *Duo Parallelepipeda, duo Cylindri aut Coni, duo quævis Prismata, duæ Pyramides, ſunt ad ſeinvicem in Ratione Compoſita Baſium & Altitudinum.*

Fig. 180. DEMONSTR. Habeant ſe duorum Parallelepipedorum rectorum, A & B, Baſes ùt m ad n, & Altitudines ùt x ad z. Poſitis igitur duabus Rationibus $m:n$, $x:z$, eſt Productum $m \times x$ ad $n \times z$ in Ratione Compoſita datarum Rationum *, i.e. Baſium & Altitudinum. Atqui $m \times x = A$, & $n \times z = B$. Ergo. *Q. e. d.*

*Arithm. §. 109. p. 130.

Idem eodem modo oſtenditur tum de quibusvis Priſmatibus, etiam obliquis, cùm hæc æqualia ſint Rectis * eandem baſim & altitudinem habentibus; tum de horum Priſmatum tertiis, i.e. Pyramidibus. Item de Cylindris, proinde & de Conis, Cylindrorum tertiis.

* Pr. 39.

COROLLARIUM. Quia Sphæræ ſunt Cylindrorum ſibi circumſcriptorum duæ tertiæ *; erunt uti Cylindri, ita & hæ ad ſeinvicem in Ratione Compoſita ſuorum Circulorum maximorum & Diametrorum.

* Pr. 40. Cor.

E. XI. 32. XII. 5. 6. 11. 14.

§. 250. SCHOLION. I. Si Baſes ſint æquales; erunt prædicta Solida ad ſe invicem, ùt Altitudines. Cùm enim tunc ſit m ad n, ùt 1 : 1, patet propoſitum. Viciſſim erunt ad ſe ùt Baſes, ſi Altitudines fuerint pares. II. Cylindri æqualium altitudinum ſunt ad ſe in Ratione Baſium *; Atqui Baſes, quæ ſunt Circuli, ſunt ad ſe ùt Diametrorum Quadrata *. Ergo & Cylindri.

* num. præc. * Pr. 31. Cor. I.

PROPOSITIO XLIV.

§. 251. *Duo Cubi* A *&* B *ſunt ad ſeinvicem in Ratione Triplicata laterum Radicalium* x *&* z.

II. * *Et duæ Sphæræ ſervant inter ſe Rationem Triplicatam Diametrorum.* Tab. VII. * LXII. 18.

DEMONSTRATUR I. *Pars*. Poſitis tribus Rationibus $x:z$, $x:z$, $x:z$, eſt xxx ad zzz in Ratione Compoſita trium datarum Rationum *. Sed hæ ſunt æquales. Ergo eſt xxx ad zzz (i.e. A ad B) in Ratione Triplicata * laterum Radicalium x, z. *Q. e. d.* * *Arithm* §. 109. * *Arith.* §. 86.

DEMONSTR. II. *Pars*. Cylindri A & B Sphæris circumſcripti & æque alti cum iſtis ſunt ad ſe in Ratione Triplicata Diametrorum. Ergo etiam ipſæ Sphæræ, tanquam Cylindrorum partes ſimiles, videl. duæ Tertiæ. *Probo Antecedens*. Cylindri iſti ſunt ad ſe in Ratione Compoſita Baſium, & Altitudinum * i.e Diametrorum. Atqui Ratio Baſium eſt Duplicata Diametrorum *, & Ratio Altitudinum eſt Simplex Diametrorum. Ergo Ratio Cylindrorum eſt Compoſita ex Duplicata & Simplici Diametrorum, proinde eſt Triplicata Diametrorum, *per Arithm*. §. 86. *n*. 2. *Q. e. d.* * *Pr*. 43. * *Pr*. 31.

COROLLARIUM. Sphæræ igitur ſunt etiam ad ſe, ut Cubi ex Diametris.

§. 252. SCHOLION. Sunt etiam ad ſe in Triplicata Ratione Priſmata quævis ſimilia, item Pyramides ſimiles; i.e. quorum baſes ſunt plane ſimilia, & altitudines ad ſe ſunt, ut baſium latera homologa; id quod ex Prop. 30, & Arithm. §. 109. deducendum tibi relinquitur. Idem probabis de Cylindris & Conis ſimilibus, quorum nempe Diametri in baſi ſunt ad ſe, uti ipſorum altitudines. E. XI. 33. XII. 8. 12.

Tab. VII.

CAPUT II.
Problemata Stereometrica.

ARTICULUS I.
Corporum dimenſio ſecundum ſoliditatem.

PROBLEMA I.

§. 253. *Metiri Cubum, quodvis Priſma, & quemvis Cylindrum.*

Reſolutio horum ſatis conſtat ex Propos. 42. & 39. Nempe baſes (quæ inveniuntur per Part. II. Cap. III. Art. I.) ducuntur in Altitudinem.

SCHOLION. Ex dimenſione Parallelepipedi fluit modus menſurandi ſtrues lignorum, quando hæc in Parallelepipedi formam componitur; item capacitatem foſſarum, cubiculorum; ſoliditatem murorum. II. Acervum frumenti ita metieris. Cogatur prius frumentum in figuram Rectangularem; deinde menſurabis & baſin inferiorem *abcd* & ſuperiorem *fg*: in utramque ducito altitudinem frumenti; prodibit in producto primo acervus juſto major, in 2do alius juſto minor. Minorem a majore ſi ſubtrahas, cape dimidium differentiæ, illudque minori acervo adjice: prodibit, quod petebatur. Demum Modii Cylindrici capacitatem explora *per Problema præſens*, e.g. quot cubos pollicares iſthæc contineat; & licebit determinare, quot Modii in acervo contineantur, ſi nempe Summam cuborum pollicarium in toto acervo contentorum dividas per Summam cuborum pollicarium in Modio contentorum.

Fig. 195.

PROBLEMA II.

§. 254. *Invenire ſoliditatem Pyramidis aut Coni.*

Baſin duc in Altitudinem. Productum divide per 3; quotus dabit Pyramidem aut Conum. Patet ex Propos. 37. & Probl. 1.

Vel brevius. Baſin duc in partem tertiam altitudinis (ſic enim rurſus prodibit tertia pars Priſmatis, contenti intra eandem baſin & altitudinem cum Pyramide); vel totam Al-

titudinem in tertiam partem Baſeos. Productum dabit petitum. Tab. VII. Fig. 192.

SCHOLION. Pyramidem truncatam ABCDEF ita metieris. Ductâ EO parallelâ ad FB, eſt * ùt AO ad OB, ita AE ad EG; & ùt AE ad EG, ita Altitudo mn, quam ſuppono cognitam, ad Altitudinem nG. Notâ igitur mG, quæratur primò Soliditas Pyramidis totius ABCG, 2do Pyramidis EFDG: ac poſteriorem ex tota ſubtrahe: reſiduum dabit truncatam. * Pr. 24.

Sic etiam ex truncati Coni AF baſibus & Radiis pronum erit invenire altitudines, atque inde Conum truncatum. Fig. 191.

PROBLEMA III.

§. 255. *Invenire Soliditatem Sphæræ, quando nota eſt Sphæræ vel Diameter vel Peripheria.*

Circulum Sphæræ maximum (*inveniendum per* §. 211.) duc in Diametrum. Productum (*quod æquivalet Cylindro, Sphæræ circumſcripto*) divide per 3. Quotus bis ſumptus dabit Sphæram *. * §. 246.

Vel Circulum maximum multiplica per $\frac{2}{3}$ Diametri.

PROBLEMA IV.

§. 256. *Invenire quam proxime proportionem inter Sphæram, & Cubum ex Diametro Sphæræ.*

Si cujusvis Sphæræ Diameter ſumatur partium 300; erit Circulus maximus 70650 *, & * §. 179. Cylindrus Sphæræ circumſcriptus = 21195000 *: Sphæra autem huic inſcripta = 14130000. Demum Cubus ex 300 eſt 27000000. * Prob. I. Jam vero ſi utrumque poſteriorum numerorum dividas per 10000: erit Sphæra ad Cubum, ùt 1413 ad 2700. Et ùt 157 ad 300; ſi Diametrum ponas 100.

SCHOL. *Duorum præcedentium Problematum uſus obtinet in Aſtronomia, ubi ex inventa Planetæ Diametro ejus globum metimur*

Tab. VII. *tur; & ex Diametrorum Cubis Planetas inter ſeſe conferunt. Sic dum juxta Recentiores Aſtronomos Diameter Terræ eſt ad Diametrum Solis ut 1 ad 100; erit Terra ad Solem, ut 1 ad 1000 000.*

PROBLEMA V.

Fig. 189. §. 257. *Metiri quantitatem fluidorum, contentorum in vaſis Cylindricis & Doliis.*

Paretur ante omnia Virga Cylindrometrica *bg* vel Pithometrica (Viſier-Ruth) in hunc modum. Habeatur vas Cylindricum *abz*, capiens exacte menſuram determinatam, v.g. Cantharum, vel Quartale (Ein Viertel) vel Amphoram (Eimer). Hujus Cylindri Diametro *ab* fac æqualem Perpendicularem *b* 1; & Hypotenuſæ *a* 1 fac $=$ *b* 2; & ipſi *a* 2 $=$ *b* 3. & ſic porro. Lineam *ag* ita diviſam inſcribe virgæ Pithometricæ lateri uni, quod vocabimus *latus Geometricum*. *Secundo* vaſis *bz* profunditatem *az* pone repetitis vicibus in alio contiguo virgæ latere, adſcriptis numeris 1, 2, 3, 4 &c. quod vocabimus *latus Arithmeticum*. Itaque

* Fig. 190. I. Si detur vas Cylindricum *on* * ejusdem altitudinis cum Cylindro *az*, habens tamen baſin majorem; applica diametro hujus baſeos majoris Geometricum virgæ latus, & vide, quos numeros ex *b* verſus *g* comprehendat. Adæquet diameter *mo* lineam *b* 2. Dico, Cylindrum majorem continere duas menſuras; & ſi *mo* fuerit $=$ *b* 3, aut *b* 4 &c. dico, *on* continere menſuras 3 aut 4, quarum unam capit ipſe *bz*. DEMONSTR. Vaſa Cylindrica æqualium altitudinum ſe habent ut Quadrata Diametrorum baſeon *. Atqui quadratum $a1^2$ i.e. $b2^2$ eſt duplum alterius $b1^2$ vel ab^2 *: &

*§.250.
*Pr.15.

$x2^2$ i.e. $b3^2$ ($= b2^2 + ab^2$) eſt triplum ipſius ab^2, &c. Ergo etiam vas *on* vaſis *bz*. Tab. VII.

Jam vero ſi Cylindrus *on* habeat & altitudinem & baſin majorem quam *bz*; applica primùm, ùt ante, latus Geometricum Diametro *mo*, ut conſtet, quoties *bz* contineatur in *on*, ex hypotheſi, quod eadem ſit utriusque Vaſis altitudo. 2do; applicato in profundum Arithmetico latere, vide, quoties altitudo *az* contineatur in altitudine *mn*; toties namque accipiendus eſt numerus menſurarum ex Geometrico latere mox inventarum, ut habeatur tota Vaſis *on* capacitas.

Eam in rem præſtat aſſumere altitudinem ipſius *bz* minorem & humilem reſpectu baſeos. Hac eadem virgâ, ùt prius, parari

II. Dolii capacitatem ita metiri licebit. Metire baſeos diametrum CD, item profunditatem XZ = BA; ſubtractâ CD ex AB, adde ſemidifferentiam ipſi CD, ut prodeat *nm*, quæ vocatur *Diameter æquata*. Huic *nm* vel AD applica virgæ noſtræ latus Geometricum; & numerum in eo inventum multiplica per longitudinem BP, Arithmetico virgæ latere quærendam. Productum dabit capacitatem internam Dolii. Fig. 183.

RATIO. Docet experientia, quod capacitas Doliorum noſtrorum in Germania æquivaleat Cylindro, cujus baſis ſit Diameter æquata *nm*, & altitudo ſit ipſa BP. Ergo, ſecundum ſupra dicta, recte reperitur Dolii capacitas. EXEMPLUM. Sit $mn = b\,12$ in bacillo Pithometrico, & BP contineat ex latere Arithmetico partes 20; continebit dolium DXQ 12×20 i.e. 240 menſuras, qualium unam comprehendit Cantharus *bz* in Fig. 189.

Tab. VII. §. 258. SCHOLION. Satius eſt dividere Cylindri *b* Diametrum *ab* in partes 1000, & exinde Calculo Arithmetico, per extractionem Radicum quadratarum, ſupputare ipſas *b* 2, *b* 3, *b* 4 &c. Quo pacto competent ipſi *b* 2 particulæ 1414; ipſi *b* 3, 1732; ipſi *b* 4, 2000 &c. juxta hanc Tabellam.

	Diam.	Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.	Menſ.	Diam.
1	1000	11	3316	21	4582	31	5567	41	6403
2	1414	12	3464	22	4690	32	5650	42	6480
3	1732	13	3605	23	4796	33	5744	43	6557
4	2000	14	3741	24	4898	34	5831	44	6633
5	2236	15	3873	25	5000	35	5916	45	6708
6	2449	16	4000	26	5099	36	6000	46	6782
7	2645	17	4123	27	5196	37	6082	47	6855
8	2828	18	4242	28	5291	38	6164	48	6928
9	3000	19	4359	29	5385	39	6244	49	7000
10	3162	20	4472	30	5477	40	6324	50	7071

Tabulam hanc usque ad 100 extenſam vide apud P. Schottum. Plura de Pithometria vide apud Hartmann. Beyer, qui ex profeſſo ſcripſit ſuper iſtud argumentum; & P. Schott. Curſ. Math. L. 6; & Wolffium in Element.

PROBLEMA VI.

§. 259. *Metiri ſoliditatem corporis cujusvis irregularis, e.g. Statuæ.*

Conſtrue tibi vas Cylindricum aut Parallelepipedum, quod & corpus menſurandum capere poſſit, & cujus tibi capacitas nota ſit. Itaque Corpus irregulare intra hoc vas poſitum circumda arenâ aut aquâ, atque vas impleatur. Exime nunc Corpus irregulare; & Spatium vacuum, ex §. 253 menſurandum, dabit corporis tui ſoliditatem.

ARTICULUS II.

Dimenſio ſuperficierum, quibus corpora clauduntur.

PROBLEMA I.

§. 260. *Metiri ſuperficies cujusvis Priſmatis & Pyramidis.*

Quandoquidem dictæ figuræ meris clauduntur figuris planis vel Triangularibus, vel Quadrilateris, vel Polygonis; conſtat abunde Reſolutio hujusce Problematis ex Part. II. Cap. III. Art. I. Tab. VII.

PROBLEMA II.

§. 261. *Invenire ſuperficiem Cylindri, & Coni Recti.*

I. Peripheriam baſeos Cylindricæ duc in Cylindri altitudinem. Productum dabit ejusdem ſuperficiem lateralem; utpote quæ conſiderari poteſt velut compoſita ex infinite parvis paralleſogrammis *abil*, *bcfi* &c., quorum baſes ſint portio peripheriæ, altitudo communis cum Cylindro. Huic Superficiei laterali adde nunc illam baſium. Fig. 164.

II. Cùm Coni hujus ſuperficies coniformis ſit æqualis triangulis infinite parvis, *abc*, *bec* &c. ſequitur ex §. 208, ſuperficiem hanc haberi, ſi peripheria baſeos ducatur in dimidium altitudinis *ac*, quæ eſt omnibus Triangulis communis, ex geneſi, §. 231. n. 3. Fig. 165.

PROBLEMA III.

§. 262. *Superficiem Sphæræ invenire.*

Quære Circuli maximi (nempe a Radio generati) aream. Hujus quadruplum dat ſuperficiem convexam Sphæræ.

DEMONSTR. Sphæra eſt æqualis Pyramidi (vel Cono) cujus baſis eſt ſuperficies Sphæræ, altitudo eſt Radius *: hujus autem Pyramidis ſoliditas habetur, ſi Sphæræ ſuperficies multiplicetur per tertiam partem Radii *. Econverſo autem, ſi tota ſoliditas Pyramidis

* Pr. 41.
* §. 254.

Tab. VII. dividatur per tertiam partem Radii, prodibit baſis ſeu Sphæræ ſuperficies *. Atqui ſi cu-
*Arithm Pr. 6. juscunque Sphæræ Diameter aſſumatur par-
*§.255. tium 300, ejus ſoliditas eſt 14130000 *; quæ diviſa per 50, tertiam Radii partem, præbet 282600. Ergo hic numerus ſiſtit ſuperficiem. Sed idem numerus 282600, eſt quadruplus
*§.211. Circuli maximi, qui hîc eſt 70650 *. Ergo.

§. 263. SCHOLION. Applicato Problemate præcedente, invenies, ſuperficiem Cylindri Sphæræ circumſcripti eſſe æqualem ſuperficiei Sphæræ inſcriptæ.

Fig. 178. II. Poſſumus nunc ſoliditatem Sectoris *ado* in Sphæra invenire, ſi ejus ſuperficiem convexam ducamus in partem tertiam Radii. Et ſi Conum *ado* ſubtrahas ex hoc ſectore, conſtabit ex reſiduo Segmentum Sphæricum.

SCHOLION GENERALE.

§. 264. *De modo mutandi figuram unam Solidam in aliam, pauca ſolum & utiliora delibo.*

Quamlibet Figuram mutabis in Cubum, ſi poſt inventam ejus Soliditatem, numero expreſſam, ex hoc Radicem Cubicam extrahas, & Radici Cubum ſuperſtruas.

Cubum, cujus ſoliditas ſit e.g. 217081801, vertes in Sphæram, ſi fiat ùt 157 ad 300, ita 217081801 ad 414805989, cujus Radix Cubica 745 dabit Diametrum Sphæræ deſideratæ. Patet ex Prop. 44. Cor. & Artic. præc. Probl. 4.

Parallelepipedum B = 27000 ped. cub. vertes in aliud, quod conjungi poſſit Parallelepipedo A ſecundùm baſin *a* = 900; Si ipſum B dividas per *a*: quotus enim 30 oſtendet altitudinem ipſius B, quando ejus baſi conceſſa ſunt 900.

Cubum A vertes in Cylindrum, ſub data altitudine *x*, ſi dividas A per *x*: quotus enim dabit numerum, qui tan-
*§.217. quam quadratus in circulum mutandus eſt *: pateterque nunc Problema.

FINIS

O. A. M. D. G.

APPENDIX
AD
GEOMETRIAM.
DE
FIGURIS TUM PLANIS, TUM SOLIDIS AUGENDIS VEL MINUENDIS.

PROBLEMA I.

Figuræ Planæ aliam ſimilem conſtituere, majorem vel minorem. Tab. VI. Fig. 136.

I. Ut Figuræ Planæ ABCDE conſtituas aliam ſimilem, ſed minorem, duc ex angulis rectas, confluentes in puncto aliquo interno *o*; & incipiendo v.g. in *a* duc ipſas *ab*; *bc*, *cd*, *de*, cum majoribus datis parallelas. Erit *ac* ſimile dato AC. Patet ex §. 86. & Prop. 25. Pariter ſi ex Polygono D (Tab. VII. Fig. 170.) ducas rectas in punctum externum C, licebit intra has delineare figuram AB, ipſi D ſimilem.

II. Vel. Ad angulum aliquem figuræ datæ, v.g. ad D, fac latera D*c*, D*e* proportionalia ipſis DC, DE; & ex punctis *c* & *e* duc parallelas cum reliquis datæ figuræ lateribus. Erit *eb* ſimile ipſi EB. Tab. VI. Fig. 135.

III. Vel. Figuram datam ABCDE reſolve in Triangula, M, N, P. Ductâ jam *ab* fac angulos *dab*, *dba* æquales angulis DAB, DBA, & comple Triangulum *n*, Tab. III. Fig. 80.

nunc ſimile alteri N. Et ſic porro fiant *m* & *p* ſimilia ipſis M & P.

Tab. VII. Fig. 184 & 185. IV. VEL. Figuram planam include Quadrato ABCD, aut Rectangulo, in plura alia quadrata minora ſed æqualia dividendo. Fac ſimile Rectangulum *abcd*. Et facile erit intra hujus cancellos figuram datæ ſimilem delineare, prout liquebit ex Figuris 184 & 185 inter ſe collatis. Hoc pacto rediges Ichnographias Camporum, Regionis totius, ædificiorum, Munimentorum &c. in formam minorem.

SCHOLION I. Vice verſa, invertendo nempe operationes hucusque recenſitas, minorem figuram vertes in ſimilem majorem.

Fig. 184. SCHOLION II. Figuram aliquam planam vertes in æqualem ac ſimilem, *primo* per Quadrati modo dicti cancellos quadratos. *2do*. Poſtquam Figuram Archetypam clathro & cancellis illis quadratis incluſiſti; idem clathrum transfer in chartam aliam, cui figuram ectypam inſcripturus es. Habe jam Regulam RS, cujus latus *mn* divide in partes 100 vel 1000: hanc Regulam applica clathri lineæ uni v.g. *mn*, & eidem Regulæ applica Triangulum aliquod Rectangulum mobile, cujus latus *ix* ſit pariter in certas partes minutas diviſum. Jam ſi ex Archetypo velis in ectypum transferre punctum qualecunque v.g. *o*; admove Triangulum Regulæ adſtrictum ita, ut ejus Cathetus tangat punctum *o*: adverte tum illum numerum in Regula, quem Catheti extremitas *x* attingit, tum illum in *ix*, qui puncto *o* reſpondet; poterisque nunc, ſi Regulam & Triangulum eodem modo in ectypi charta diſponas, in hanc transferre & punctum *o*, & alia quævis.

Celerius res peragitur, ſi ad manum ſit vitrum grande ſpeculare diaphanum. Huic imponitur Archetypum, iſti charta candida pro ectypo. Jam ſi vitrum ex ſitu verticali aliquantum inclines verſus feneſtram & ſuper machinam firmes; haud difficile erit Archetypum imitatrice calamo effingere ſuper chartam candidam.

PROBLEMA II.

Triangulum vel aliam quamvis figuram in data Ratione augere vel minuere.

Tab. V. Fig. 118. Ad propoſitum aſſequendum inſcribitur Circino Proportionis gemina Linea CM, CN, dicta LINEA GEOMETRICA vel Planorum. Utraque hoc pacto in ſuas partes diſtribuitur: ex Tabula §. 258, deſumuntur pro prima parte particulæ 1000, ponendæ ex C verſus M; pro

pro 2do puncto, 1414; pro 3tio, 1732. &c. Vel ex ſcala 1000 partium accipe partes 100; 141; 173. &c. En aliquem hujusce lineæ uſum. Vis noſſe duorum Triangulorum ſimilium Rationem inter ſe; explora directe ex C verſus M unius Trianguli latus, ſimiliter latus homologum alterius Trianguli; attingat primi latus punctum 4, alterius latus punctum 6; dico hæc Triangula eſſe ad ſe ut 4:6, vel 2:3.

RATIO. Triangula ſunt ad ſe ut Quadrata laterum homologorum. Atqui (ex conſtructione Tabulæ §. 258) Quadrata, quorum Radices ſunt iſta homologa latera, ſe habent ut 4 ad 6. Ergo. Jam ad reſolutionem Problematis.

I. Sit Quadratum aliquod augendum ut 4 ad 9. Pone dati Quadrati latus in Circini Proport. Linea Geom. transverſim ex 4 in 4; transverſa inter 9 & 9 dabit Radicem Quadrati, quod ſit ad prius ut 9 ad 4. RATIO. *Transverſales* ſe habent, ut lineæ *directæ*. Atqui directæ ſunt Radices quadratorum, quæ ſunt ut 4 ad 9. Ergo etiam transverſæ.

II. Facturus Triangulum ABC ſimile alteri dato *abc*, Tab.
ſed triplum hujus, pone lineam *ab* in Linea Geometrica III.
Circini Proport. inter 10 & 10; & transverſam inter 30 Fig.
& 30, accipe pro AB; fac A ≍ *a*, B ≍ *b*, & comple 64.
Triangulum. *Vel.* (Tab. VII. Fig. 182.) Inter C, & A (triplam ipſius C) quære mediam proportionalem B; huic ſuperſtrue Triangulum ſimile ipſi C: erit hoc ſimul triplum Trianguli C. RATIO. Ut Triangulum C ſit ſubtriplum Trianguli B, debet latus C eſſe ad homologum B in Ratione ſubduplicata Rationis 1:3 *. At- * *Pr.* 30.
qui ſi ponas tres rectas continue proportionales C, B, *Cor.* 5.
A, ita ut ſit C: A :: 1:3; tunc C dicit ad B Rationem ſubduplicatam ipſius 1:3 *. Ergo. *Vel.* Ope Arithme- * *Arithm*
tices ac Tabulæ §. 258. Dic: ut 1000 ad 1732, ita §. 86.
linea C ad Scalam explorata, ad B ex Scala ſumendam. Erit Δ ſuper B ad Δ ſuper C, ut 3 ad 1.

SCHOL. Ut fit augmentum, ita vice verſa imminutio Figu- * Tab.
rarum. Sic * Dato polygono AC, facies aliud ſimile & dati ſub- III.
triplum, ſi inter AB & hujus partem tertiam invenies Mediam Fig.
80.

proportionalem ak, illique Polygonum dato ſimile ſuperſtruas. Pari modo hactenus explicato, duplicantur, triplicantur, vel ſubduplicantur &c. Circuli.

PROBLEMA III.

Augere vel minuere Cubum in data Ratione.

Hunc in finem inſcribunt Circino Proport. Lineam Cubicam. De qua vide P. De Chales Tom. II. L. 4. Geom. Pract. & Bion, Scheffelt.

I. Ut Cubo A = 27, conſtituas Cubum quater majorem, extrahe ex Cubo A quadruplicato, i.e. ex 108, Radicem Cubicam, cujus Cubus erit quadruplus ipſius A.

II. Idem obtinebitur, ſi inter Radicem Cubi dati A, & inter aliam lineam, quæ mox dictam Radicem quater contineat, quæras duas Medias proportionales (methodo paulo poſt declaranda) & primæ Mediæ ſuperſtruas Cubum B; hic enim erit ipſius A quadruplus.

RATIO. Cubi ſunt ad ſe in Triplicata Ratione Radicum *. Proinde ſi Cubus A dicat ad alium B Triplicatam Rationem = eee = 1:4; Radices eorum illæ erunt, quæ habent ad ſe Triplicatæ ſimplicem e. Atqui 4 continue proportionalium Prima habet hic ad Quartam Rationem Triplicatam, eee = 1:4 *; Prima vero ad Secundam habet Rationem ſimplicem e (*quæ in hoc caſu eſt Radix Cubica ex 4 extrahenda*). Ergo.

* Pr.44.

* ex hypoth.

Et quia etiam Sphæræ ſunt ad ſe in Ratione Triplicata Diametrorum; alia vero Corpora ſimilia in Ratione Triplicata laterum homologorum vel Altitudinum; patet etiam, quomodo hæc pro data Ratione augere aut minuere oporteat.

Duæ autem Mediæ proportionales inveniri poſſunt vel Geometrice, vel Arithmetice. Methodus illas pure Geometrice inveniendi refertur inter Problemata, hucusque nondum ſoluta. Mechanico-Geometrice hunc in modum ſolvitur. Sint inter AO, OD, inveniendæ duæ mediæ proportionales: junge datas ad angulum Rectum AOD, easdemque indefinite producito verſus B & C. Jam vero ſi duos Gnomones ita applices, ut unius latus internum tangat ſemper punctum A, internus vero ex-

Tab. VII. Fig. 186.

gulus Rectus apice ſuo incidat in lineam OB; ac Gnomon alter, primo perpendiculariter inſiſtens, tangat punctum D: determinabuntur ipſæ OB & OC, Mediæ proportionales. Nam in Triangulo ACB eſt AO:OB::OB:OC*; & in BDC eſt OB:OC::OC:OD; ut proinde ipſæ AO, OB, OC, OD ſint 4 continue proportionales. Alios modos alii præſcribunt.

* Pr. 27. Cor.

a	b	c	d
2.	4.	8.	16.

II. *Arithmetice* inveniuntur inter datos numeros *a* & *d* (2 & 16) duæ Mediæ proportionales, ſi fiat: Ut primus *a* (2) ad alterum datum *d* (16); ita Cubus ex primo (= 8) ad *x* (= 64). Extracta ex *x* Radix Cubica *b* præbet ſecundum inter 4 proportionales. Jam vero invenitur inter *b* & *d* Media proportionalis *c*, *per Arithm. Prop*. 8. *Cor*. 1. Erit factum. Nam ſi exiſtant 4 continue proportionales, *a*, *b*, *c*, *d*; eſt ut *a* ad *d*, ita Cubus ipſius *a* ad Cubum ipſius *b* (etenim *a* eſt ad quartum *d* in Ratione Triplicata ipſius *a* : *b* *; atqui etiam Cubus ex *a* eſt ad Cubum ex *b* in Ratione Triplicata Radicum *a* & *b* *; ergo). Proinde Radix Cubi ex *b* dat terminum proportionalem ſecundum; quo habito invenitur, juxta dicta, ipſe *c*.

* *Arithm.* §. 86. n. 2.

* *Pr.* 11.

[illegible]

SYNOPSIS ELEMENTORUM EUCLIDIS,

In qua notantur ejusdem Propoſitiones. Demonſtrantur per tranſennam harum aliqua. Numerus Romanus indicat, qualis & quota in ordine Euclidæo ſit illa Propoſitio, cui præfigitur. §§ubi, Propoſitiones, paginæ &c. quæ numerum Romanum ſequuntur, monſtrant locum hujus Opuſculi, in quo Euclidæa Propoſitio reperiri poſſit. Siquando in hac Synopſi ſolum Propoſitionis Euclidææ numerum, non argumentum legis; hoc tibi nunc minime opus eſſe cogita, cum & plures ex iis, quarum argumenta recitantur, redundent, & vix aut nunquam extra forum Euclidæum compellentur.

LIBER I.

Propoſitio I, § 23. II, III. IV, *Prop*. 2. V, *Pr*. 4. VI, Æqualibus Trianguli angulis opponuntur æqualia latera. *Continetur in* § 81. VII. VIII, *Pr*. 5. IX, § 37. X, § 38. XI, § 39. *num*. 1. XII, § 39. *n*. 2. XIII, § 16. *Cor*. 2. & 3. XIV, *Pr*. 1. *Schol*. XV, *Pr*. 1. XVI, *Pr*. 7. *Cor*. 6. XVII, *Pr*. 7. *Cor*. 4. XVIII & XIX, *Pr*. 8. XX, Cujusvis Trianguli duo latera ſimul ſunt reliquo majora. *Patet ex* § 29. *Ax*. 10. XXI *, Si ex baſeos extremitatibus B & *b* intra Δ B*b*c, duæ rectæ B A, *b* A, junguntur; hæ cruribus B C, *b* C, minores quidem ſunt (*quia illa majore circuitu gaudent*) majorem tamen angulum (B A *b*) comprehendunt. *Nam ſi ex C per A producas rectam, dividetur novus angulus* (B A *b*) *in duos externos, quorum quivis major eſt* * *ſuo interno ad* C; *proinde & totus* B A *b*, *major eſt toto* B C *b*. XXII, Ex 3, rectis datis; quarum duæ qualibet reliquâ ſint majores, Δlum conſtruere. *Implicite*

* Tab. I. Fig. 23.

* Pr. 7. Cor. 6.

continetur in § 35. XXIII, § 36. XXIV & XXV, Si 2 Δla habeant duo quævis crura mutuo æqualia, ſed angulos ab his interceptos inæquales; opponetur horum angulorum majori major baſis: & baſi majori major angulus. XXVI, *Pr.* 3. XXVII & XXVIII & XXIX, *Pr.* 6. XXX, § 44. XXXI, § 44. *Cor.* 3. XXXII, *Pr.* 7. *& ejus Cor.* 5.
* Tab. V. Fig. 110. XXXIII, * Rectæ AD, BC, quæ æquales & parallelas lineas AB, DC, jungunt, ſunt & ipſæ æquales & parallelæ. *Demonſtratur ex Pr.* 6. *&* 2. XXXIV, *Pr.* 9. XXXV, *Pr.* 11. XXXVI, *Pr.* 11. *Cor.* 1. XXXVII & XXXVIII, *Pr.* 12. XXXIX & XL, ſunt Converſæ duarum priorum. XLI, *Pr.* 13. XLII, § 214. XLIII, *Pr.* 14. XLIV, § 214. XLV, § 215. *Schol.* XLVI, § 157. XLVII, *Pr.* 15. XLVIII, eſt Converſa prioris.

LIBER II.

Continet 14 Propoſitiones, quarum 10 priores (ut notat Sturmius) non tam ad Geometriam, quam quantitatem in genere pertinent. Habent hæ ipſæ inſignem uſum in Algebra, & ab hac expeditius quam vulgari Geometria demonſtrantur. *Ex his* IVta (Si Recta A ſecetur in 2 partes a, b; erit Quadr. $AA = aa + 2ab + bb$) *baſin ſternit extractioni Radicis Quadratæ: vide Arithm. pag.* 82. *Prop.* 25. XIV, Dato Rectilineo æquale Quadratum conſtituere. *Continetur in* § 215. *Schol.*

LIBER III.

I, *Pr.* 18. *Cor.* 2. II, Recta, ducta per duo Peripheriæ puncta, cadit intra Circulum. *Per ſe patet.* III, *Pr.* 17. *p.* 1. *&* 2. IV, In Circulo ſi duæ rectæ, non per Centrum ductæ, ſe ſecent, non ſe ſecabunt bifariam. V & VI, Circuli ſe mutuo ſecantes aut interius tangentes, non ſunt Concentrici. *Patet ex Definitione & geneſi Circulorum Concentricorum.* VII. VIII. IX, Punctum intra Circulum, a quo plures quam duæ æquales rectæ duci poſſunt ad Peripheriam, eſt illius Centrum. X, XI, XII, XIII, Circuli & ſe mutuo & lineam rectam in puncto ſolum tangunt. *Alias vel hi congruerent, vel recta cum curva congrueret.* XIV, In Circulo Chordæ æquales æqualiter a Centro diſtant, & contra. *Continetur in Propoſ.* 17. *part.* 2. XV, Rectarum Circulo inſcriptarum maxima eſt Diameter; Cæterarum ea major, quæ Cetero propior. XVI, *Pr.* 19. *p.* 1. XVII, § 74. XVIII, *Pr.* 19. *p.* 2. XIX, Si recta Circulum tangat, & ex contactu excitetur Perpendicularis, erit in ea Centrum. *Eſt Converſa Propoſitionis* 19. *part.* 2. XX, *Pr.* 20. XXI, *Pr.* 20. *Cor.* 3. XXII, *Pr.* 20. *Cor.* 2. XXIII, XXIV. XXV, Datum arcum perficere. *Continetur in* § 174 *&* § 68. *num.* 2. XXVI & XXVII, *Pr.* 16. XXVIII & XXIX, Si in Circulis æqualibus anguli ſive ad Centra, ſive ad Peripheriam ſint æquales; etiam arcus, quibus inſiſtunt, ſunt æquales. *Conſtat ex* § . [illegible] *&* 70.

XXX, *Pr.* 17. *Schol.* 2. XXXI, *Pr.* 20. *Cor.* 1. XXXII *, * Tab.
Si Recta AB Circulum tangat, & alia B*r* ex contactu ducta eum II.
ſecet; erit angulus (AB*r*) a Tangente & Secante factus, æqualis Fig.
angulo (B*sr*) ad Peripheriam, qui arcui B*r* inſiſtit. *Nam du-* 62.
cta Diametro Bm *eſt tam* ABm, *quam* BSm *Rectus* *: *a quibus*
ſi ſubtrahas æquales * rsm, rBm; *reſtant dicti anguli æquales.* n. 2.
XXXIII. XXXIV, XXXV, * Si in Circulo duæ rectæ B*m*, * §§ 69.
rs, ſe ſecent; erit Rectang. ſub *mo*, *o*B = Rectang. ſub *so*, *or*. 71.
Nam ΔΔ mos, roB, *ſunt æquiangula, ob æquales tum verticales* * § 73.
ad o, *tum ipſos* rBm, rsm *. *Ergo ut* mo : os :: ro : oB. *Er-* * Tab.
go *. XXXVI, Si a puncto A extra Circulum dato (*Fig. ead.*) II.
ducatur una Tangens AB, & altera Secans A*s*; erit Rectangulum Fig.
ſub tota Secante A*s* & ejus parte *r*A, extra Circulum extante, 62.
æquale Quadrato Tangentis. *Nam* ΔΔ AsB, ABr *ſunt æquian-*
gula ob angulum A *communem, & æquales* AB*r*, AsB (*per Euclid.* n. 2.
Libr. 3. *Prop.* 32.) *Ergo ut* sA : AB :: AB : Ar. *Ergo* *. *Ser-* * § 73.
vit hæc Propoſitio, ut Rectangulo ſub sr, rA *fieri poſſit æquale Quadra-* * Pr. 29.
tum AB; *ſed præplacet modus* § 215. *Servit item ad inveniendam* * Pr. 29.
mediam Proportionalem AB, *inter duas* sr, rA, *ſi bis in unam re-* Cor.
ctam junctis ducas ex ipſius sr *puncto medio circulum, cujus Radius ſit*
dimidia sr, *& ex* A *Tangentem ad* B.

LIBER IV.

I. II & III, Circulo inſcribere & circumſcribere Triangulum,
dato alteri æquiangulum. IV, Triangulo circulum inſcribere.
V, § 174. VI & VII, § 175. *n.* 2. VIII & IX, Qua-
drato Circulum in- & circumſcribere. * *Inſcribitur, ſi ex Diame-* * Tab.
trorum AB, CD, *puncto ſectionis* o *ducas Perpendiculum* or, *quo* V.
tanquam Radio duces Circulum. Circumſcribitur, ſi OA *tanquam* Fig.
Radio utare. X, * Iſoſcelion ABC conſtruere, in quo angulus ad 122.
baſin ſit duplus anguli ad verticem. *Circuli Radio* AB *jungatur* * Tab.
BD *latus Pentagoni, & huic in directum Radius: erit* CAB *duplus* IV.
anguli C, *uti colligitur ex* § 122. *n.* 3. XI, § 175. *n.* 3. Fig.
XII, Circulo Pentagonum circumſcribere. *Vide* § 177. XIII. 89.
XIV, Pentagono Circulum in- & circumſcribere. * *Erige ex la-* * Tab.
terum RN, NM *punctis mediis* y *&* x *perpendiculares, ſe intra Poly-* V.
gonum ſecantes in O: Ox *præbet Radium pro inſcriptione;* ON, *Ra-* Fig.
dium pro circumſcriptione. XV, § 175. *n.* 4. XVI, In Cir- 123.
culo Quindecagonum deſcribere. *Vide* § 176.

LIBER V.

I. II. III. IV. V. VI. VII, § 89. *Ax.* 3. VIII, Si
Quantitates A & B fuerint inæquales; major A dicet ad B majorem
Rationem, quam B ad A. *Per ſe claret. Dicitur enim una Ratio*
major alterâ, quando unius Antecedens magis continet ſuum Conſequens,
quam alterius Antecedens ſuum Conſequens. IX, § 89. *Ax.* 3.
X, Si A ad Z habeat majorem Rationem, quam B ad Z; erit A

majus, quam B. *Rurſus per ſe patet.* XI, § 89. *Ax.* 4. XII. *Eſt in Arithm. Prop.* 9. *pars* 6. *quam alii inter Axiomata referunt.* XIII. XIV. XV, Aliquotæ ſimiles ſunt ut Tota. § 89. *Ax.* 1. XVI, Datis 4 proportionalibus A:B::C:D, valet *alternando*, A:C::B:D; & XVII, valet A-B:B::C-D:D; item XVIII, valet, A+B:B::C+D:D. *Confer Propoſitionem* 29. *cum Arithm. Prop.* 9. XIX, Si ut Totum eſt ad Totum, ita ablatum ad ablatum; etiam ut Totum eſt ad Totum, ita reliquum ad reliquum. *Aliis inſtar Axiomatis eſt.* XX. XXI. XXII, Si ſit A:B::C:D, & B:E::D:F; erit ex *æquo ordinate* A:E::C:F. XXIII. XXIV, Si ſit A:B::C:D, & E:B::F:D; erit A+E:B::C+F:F. XXV. *Reliquæ 9 Propoſitiones non ſunt Euclidis.*

LIBER VI.

I, *Pr.* 28. *& Cor.* II, *Pr.* 24. III, Si recta, Δli angulum bifariam ſecans, etiam ſecet baſin; habebunt ſe baſis ſegmenta, ut reliqua latera. Et contra. IV, *Pr.* 25. V, *Pr.* 26. VI, *Pr.* 26. *Cor.* 1. VII. VIII, *Pr.* 27. IX & X, § 163. XI, § 164. XII, § 167. XIII, § 168. XIV, Duo Parallelogramma æqualia, quæ habent unum angulum uni æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproce proportionalia. Et ſi latera habent reciproca, Parallelogramma ſunt æqualia. *Poteſt eodem modo demonſtrari, quo id in Prop.* 29. *nobis ſufficiebat de Rectangulis oſtendiſſe.* XV, Si ΔΔ æqualia habeant unum angulum uni æqualem; habent latera circa æquales angulos reciproca. Et contra. *Sequitur ex priore.* XVI, *Pr.* 29. XVII, *Pr.* 29. *Cor.* XVIII, *Append. Probl.* 1. XIX, § 110. XX, § 115. XXI. XXII. XXIII; Æquiangula Parallelogramma ſunt in Ratione Compoſita baſium & reliquorum laterum. *De Obliquangulis eadem demonſtratio valet, quæ in Pr.* 30. *de Rectangulis.*

* Tab. II. Fig. 44. XXIV, * In Parallelogrammo BD, duo alia *bm*, *no*, a Diametro ſecta, ſunt ſimilia Toti, & inter ſe. *Nam quantum ad* bm, ΔΔ*la* Cbo, CBA *ſunt ſimilia* *: *ex quo nunc facile erues reliqua. Idem applica ipſi* na. XXV, Polygonum datum A (v.g. Pentagonum) mutare in aliud (v.g. Hexagonum) ſimile dato B. *Inventis ipſorum* A *&* B *Areis, vel* A *&* B *in Quadrata verſis, accipe horum Radices quadratas. Porro fiat: ut Radix Quadr. ipſius* B *ad Radicem Quadr. ipſius* A, *ita Hexagoni* B *latus unum* m, *ad latus homologum* x. *Super* x *extrue Polygonum ſimile Polygono* B, *ſcil. Hexagonum; erit hoc æquale ipſi* A. *Nam Quadrata* A *&* B *ſunt ad ſe in Rat. Duplic. Radicum; & Hexagona ſuper* m *&* x *ſunt ad ſe in Rat. Duplic. laterum homologorum* m & x, *i.e. ſuperiorum Radicum. Unde illa Quadrata, & illa Hexagona conſtituunt Proportionem. Proinde alternando erit ut Quadr.* B *ad Polygon.* m, *ita Quadr.* A *ad Polyg.* x. *Sed duo primi termini ſunt æquales: ergo & duo poſteriores.* XXVI. XXVII. XXVIII. XXIX. XXX, Datam Rectam Media & extrema Ratione ſecare. *Licebit id efficere per* § 122. n. 3. & § 163. *Nam Radius junctus lateri*

* Pr. 25. Cor. 1.

Decagoni efficit taliter ſectam lineam. XXXI, Si ſuper △li rectanguli latera, quæcunque Figuræ ſed ſimiles (v.g. Pentagona) deſcribantur; erit ea ſuper Hypotenuſam, æqualis reliquis ſuper reliqua latera. *Nam ſunt Figuræ iſtæ in Rat. Dupl. laterum, ſeu ut Quadrata laterum. Atqui ex Pr. 15. Quadratum Hypotenuſæ adæquat duo reliqua. Ergo etiam.* XXXII. XXXIII, In æqualibus Circulis vel eodem, anguli ſive ad Centra, ſive ad Peripheriam, eam habent Rationem, quam arcus, quibus inſiſtunt. *Claret ex Pr. 20 & natura Proportionis.*

LIBER VII. VIII. & IX.

Agitur in his tribus Libris de Numeris, *ſcilicet* Primis & Compoſitis, multiplicibus, proportionalibus, Planis, Quadratis, Cubis, Solidis, paribus & imparibus. *Nulla hic Arithmeticæ inſtitutio circa Numerorum vulgarem Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, Diviſionem, aut Numeros Fractos, aut Radicum extractionem; ſed ea duntaxat examinantur, quæ Libro X., i.e. Linearum Commenſurabilium aut Incommenſurabilium intelligentiæ ſerviant. Continent hi Libri Propoſitiones 104. Ex quibus uti plurimæ ad Matheſin utilem ſuperfluæ, ita aliæ eximii uſus ſunt, præſertim in Arithmeticis.*

LIBER X.

Per 117 Propoſitiones perſequitur Magnitudines Rationales & Irrationales, in ordine ad Libr. XIII. *Ambos hos Libros una cum tribus præcedentibus ex numero Elementorum expungi optat Pater De Chales.*

LIBER XI.

Numerat univerſim Propoſitiones 40. Ex quibus ſunt nonnullæ, ad explicandam Perſpectivam & Trigonometriam Sphæricam peridoneæ, quas tametſi hic prætereamus, utpote a ſcopo noſtro alienas, alibi tamen, cum illis opus erit, non omittemus. Agitur autem in hoc Libro De rectis lineis ad plana & ſolida relatis; quando ſint in uno Plano; quando perpendiculares ad planum; quando parallelæ; de Planis perpendicularibus vel parallelis inter ſe; De angulis ſolidis. Demum, de Parallelepipedis & Priſmatibus. *Ex hoc Libro continentur in noſtra Geometria* Propos. *XXIV*, Parallelepipedi latera ſunt Parallelogramma, & duo ejus plana oppoſita ſunt per congruentiam æqualia. §232. n. 3. *XXVIII*, *Pr.* 38. *XXIX* & *XXX* & *XXXI*, *Pr.* 39. *p.* 1. *XXXII*, Parallelepipeda æque alta ſunt ad ſe ut baſes. *Pr.* 43. *Schol.* 1. *XXXIII*, Similia Parallelepipeda ſunt ad ſe in Rat. Triplic. later. homolog. *Pr.* 44. *Schol.*

LIBER XII.

Per Propoſitiones 18. expendit Pyramidum, Priſmatum, Conorum, Cylindrorum & Sphærarum affectiones. Ex hoc Libro habes in no-

I 5

ſtra Geometria Propoſitionem I, *Pr.* 31. II, *Pr.* 31. *Cor.* 1. III. IV. V, Pyramides æque altæ ſunt ad ſe ut baſes. *Pr.* 43. *Schol.* 1. VII, *Pr.* 37. *p.* 1. VIII, Pyramides ſimiles ſunt ad ſe in Rat. Triplic. Inter. homolog. *Pr.* 44. *Schol.* X, *Pr.* 37. *p.* 2. *XI*, Conorum aut Cylindrorum æque altorum Ratio eadem eſt, quæ baſium. *Pr.* 43. *Schol.* 1. *XII*, Cylindri aut Coni ſimiles ſunt ad ſe in Rat. Tripl. Diametrorum baſeos. *Pr.* 44. *Schol.* *XIV*, Cylindri aut Coni æqualium baſium ſunt ad ſe ut altitudines. *Pr.* 43. *Schol.* 1. *XVIII*, *Pr.* 44. *pars* 2.

LIBER XIII.

Poſtquam Euclides præmiſit nonnullas proprietates Lineæ ſectæ media & extrema Ratione, Pentagoni item & Hexagoni; agit de Corporibus Regularibus. *Continet Propoſitiones* 18.

LIBER XIV. XV. XVI.

In his, ut in *XIII*, rurſus Corpora Regularia difficili, ſed parum utili opera pertractantur. Duo priores adſcribuntur Hypſicli Alexandrino, poſtremus eſt Franciſci Fluſſatis.

TABULA

CONTRACTIOR

SINUUM ET TANGENTIUM,

ad Radium 10000000.

Gr.	m.	Sinus	Tangens	Gr.	m.	Sinus	Tangens
*	**	******	******	8	—	13917.31	14054.08
0	15	436.33	436.33		15	14349.26	14499.31
	30	872.65	872.69		30	14780.94	14945.10
	45	1308.96	1309.07		45	15212.34	15391.47
1	—	1745.24	1745.51	9	—	15643.45	15838.44
	15	2181.49	2182.01		15	16074.26	16286.03
	30	2617,69	2618.59		30	16504.76	16734.26
	45	3053.85	3055.28		45	16934.95	17183.14
2	—	3489.95	3492.08	10	—	17364.82	17632.70
	15	3925.98	3929.01		15	17794.35	18082.95
	30	4361.94	4366.09		30	18223.55	18533.90
	45	4797.81	4803.34		45	18652.40	18985.59
3	—	5233.60	5240.78	11	—	19080.90	19438.03
	15	5669.28	5678.41		15	19509.03	19891.24
	30	6104.85	6116.26		30	19936.79	20345.23
	45	6540.31	6554.35		45	20364.17	20800.03
4	—	6975.65	6992.68	12	—	20791.17	21255.65
	15	7410.85	7431.28		15	21217.77	21712.13
	30	7845.91	7870.17		30	21643.96	22169.47
	45	8280.82	8309.36		45	22069.74	22627.69
5	—	8715.57	8748.87	13	—	22495.11	23086.82
	15	9150.16	9188.71		15	22920.04	23546.87
	30	9584.58	9628.90		30	23344.54	24007.87
	45	10018.81	10069.47		45	23768.59	24469.84
6	—	10452.85	10510.42	14	—	24192.19	24932.80
	15	10886.69	10951.78		15	24615.33	25396.76
	30	11320.32	11393.56		30	25038.00	25861.76
	45	11753.74	11835.78		45	25460.19	26327.80
7	—	12186.93	12278.46	15	—	25881.90	26794.92
	15	12619.90	12721.61		15	26303.12	27263.13
	30	13052.62	13165.25		30	26723.84	27732.45
	45	13485.09	13609.40		45	27144.04	28202.92

Gr.	m.	Sinus	Tangens	Gr.	m.	Sinus	Tangens
16	—	27563.74	28674.54	27	—	45399.05	50952.54
	15	27982.90	29147.34		15	45787.39	51503.38
	30	28401.53	29621.35		30	46174.86	52056.70
	45	28819.63	30096.58		45	46561.45	52612.54
17	—	29237.17	30573.07	28	—	46947.16	53170.94
	15	29654.16	31050.82		15	47331.97	53731.94
	30	30070.58	31529.88		30	47715.88	54295.57
	45	30486.43	32010.25		45	48098.88	54861.88
18	—	30901.70	32491.97	29	—	48480.96	55430.99
	15	31316.38	32975.05		15	48862.12	56002.62
	30	31730.47	33459.53		30	49242.36	56577.28
	45	32143.95	33945.43		45	49621.65	57154.71
19	—	32556.82	34432.76	30	—	50000.00	57735.03
	15	32969.86	34921.46		15	50377.40	58318.28
	30	33380.69	35411.86		30	50753.84	58904.50
	45	33791.67	35903.67		45	51129.31	59493.75
20	—	34202.02	36397.02	31	—	51503.81	60086.06
	15	34611.71	36891.95		15	51877.33	60681.49
	30	35020.74	37388.47		30	52249.86	61280.08
	45	35429.10	37886.61		45	52621.39	61881.88
21	—	35836.79	38386.40	32	—	52991.93	62486.94
	15	36243.80	38887.87		15	53361.45	63095.39
	30	36650.13	39391.05		30	53729.96	63707.02
	45	37055.74	39895.96		45	54097.45	64322.16
22	—	37460.66	40402.62	33	—	54463.90	64940.76
	15	37864.86	40911.08		15	54829.32	65562.87
	30	38268.34	41421.36		30	55193.70	66188.56
	45	38671.10	41933.48		45	55557.02	66817.87
23	—	39073.11	42447.49	34	—	55919.29	67450.85
	15	39474.39	42963.39		15	56280.49	68087.58
	30	39874.91	43481.24		30	56640.62	68728.10
	45	40274.67	44001.06		45	56999.68	69372.47
24	—	40673.66	44522.87	35	—	57357.64	70020.75
	15	41071.89	45044.72		15	57714.52	70673.01
	30	41469.32	45572.64		30	58070.30	71329.37
	45	41865.97	46100.64		45	58424.97	71989.70
25	—	42261.83	46630.77	36	—	58778.53	72654.26
	15	42656.87	47163.06		15	59130.96	73323.03
	30	43051.11	47697.55		30	59482.28	73996.11
	45	43444.52	48234.27		45	59832.46	74673.58
26	—	43837.12	48773.26	37	—	60181.50	75355.40
	15	44228.87	49314.54		15	60529.40	76041.77
	30	44619.78	49858.16		30	60876.14	76732.70
	45	45009.85	50404.15		45	61221.73	77428.27

Gr.	m.	Sinus	Tangens	Gr.	m.	Sinus	Tangens
38	—	61566.15	78128.56	49	—	75470.96	115036.84
	15	61909.40	78833.64		15	75756.50	116058.71
	30	62251.46	79543.59		30	76040.60	117084.96
	45	62592.35	80258.48		45	76323.25	118124.77
39	—	62932.04	80978.40	50	—	76604.44	119175.36
	15	63270.33	81703.43		15	76884.18	120236.93
	30	63607.82	82433.64		30	77162.46	121309.70
	45	63943.90	83169.12		45	77439.27	122393.89
40	—	64278.76	83909.96	51	—	77714.60	123489.72
	15	64612.40	84656.25		15	77988.45	124597.42
	30	64944.80	85408.07		30	78260.82	125717.23
	45	65275.98	86165.51		45	78531.69	126849.39
41	—	65605.90	86928.68	52	—	78801.07	127994.16
	15	65934.58	87697.65		15	79068.96	129151.79
	30	66262.01	88472.53		30	79335.33	130322.54
	45	66588.17	89253.41		45	79600.20	131506.68
42	—	66913.06	90040.41	53	—	79863.55	132704.48
	15	67236.68	90833.60		15	80125.38	133916.24
	30	67559.02	91633.12		30	80385.69	135142.24
	45	67880.07	92439.05		45	80644.46	136382.79
43	—	68199.84	93251.51	54	—	80901.70	137638.19
	15	68518.30	94070.61		15	81157.40	138908.76
	30	68835.45	94896.46		30	81411.55	140194.83
	45	69151.31	95729.17		45	81664.15	141496.73
44	—	69465.84	96568.88	55	—	81915.21	142814.80
	15	69779.05	97415.69		15	82164.69	144149.40
	30	70090.93	98269.73		30	82412.62	145500.90
	45	70401.47	99131.12		45	82658.97	146869.67
45	—	70710.68	100000.00	56	—	82903.76	148256.10
	15	71018.54	100876.49		15	83146.96	149660.58
	30	71325.05	101760.74		30	83388.58	151083.52
	45	71630.19	102652.87		45	83628.61	152525.35
46	—	71933.98	103553.03	57	—	83867.06	153986.90
	15	72236.40	104461.36		15	84103.90	155467.41
	30	72537.44	105378.01		30	84339.14	156968.56
	45	72837.09	106303.13		45	84572.78	158490.41
47	—	73135.37	107236.87	58	—	84804.81	160033.49
	15	73432.25	108179.39		15	85035.20	161598.20
	30	73727.73	109130.85		30	85264.02	163185.17
	45	74021.81	110091.41		45	85491.18	164794.90
48	—	74314.48	111061.25	59	—	85716.73	166427.98
	15	74605.74	112040.53		15	85940.64	168084.89
	30	74895.57	113029.44		30	86162.92	169766.31
	45	75183.96	114028.15		45	86383.55	171472.88

Gr.	m.	Sinus	Tangens	Gr.	m.	Sinus	Tangens
60	—	86602.54	173205.08	71	—	94551.85	290421.09
	15	86819.88	174963.71		15	94693.01	294590.50
	30	87035.57	176749.40		30	94832.36	298868.50
	45	87249.60	178562.85		45	94969.91	303259.54
61	—	87461.97	180404.78	72	—	95105.65	307768.35
	15	87672.67	182275.93		15	95239.58	312399.91
	30	87881.71	184177.09		30	95371.69	317159.48
	45	88089.07	186109.05		45	95501.99	322052.63
62	—	88294.76	188072.65	73	—	95630.48	327085.26
	15	88498.76	190068.74		15	95757.14	332263.62
	30	88701.08	192098.21		30	95881.97	337594.34
	45	88901.71	194162.00		45	96004.98	343084.46
63	—	89100.65	196261.05	74	—	96126.17	348741.44
	15	89297.89	198396.36		15	96245.53	354573.25
	30	89493.43	200568.97		30	96363.05	360588.35
	45	89687.27	202779.94		45	96478.73	366795.75
64	—	89879.40	205030.38	75	—	96592.58	373205.08
	15	90069.82	207321.46		15	96704.59	379826.61
	30	90258.53	209654.36		30	96814.76	386671.31
	45	90445.51	212030.34		45	96923.09	393750.94
65	—	90630.78	214450.69	76	—	97029.57	401078.09
	15	90814.32	216916.77		15	97134.21	408666.27
	30	90996.13	219429.97		30	97236.99	416529.98
	45	91176.20	221991.77		45	97337.92	424684.82
66	—	91354.54	224603.68	77	—	97437.01	433147.59
	15	91531.15	227267.29		15	97534.23	441936.41
	30	91706.01	229984.25		30	97629.60	451070.85
	45	91879.12	232756.30		45	97723.11	460572.07
67	—	92050.49	235585.24	78	—	97814.76	470463.01
	15	92220.09	238472.93		15	97904.55	480768.54
	30	92387.95	241421.36		30	97992.47	491515.70
	45	92554.05	244432.56		45	98078.53	502733.95
68	—	92718.39	247508.69	79	—	98162.71	514455.40
	15	92880.95	250651.98		15	98245.04	526715.17
	30	93041.75	253864.79		30	98325.49	539551.72
	45	93200.79	257149.57		45	98404.07	553007.24
69	—	93358.04	260508.91	80	—	98480.77	567128.18
	15	93513.52	263945.49		15	98555.61	581965.72
	30	93667.22	267462.15		30	98628.56	597576.44
	45	93819.13	271061.86		45	98699.64	614023.03
70	—	93969.26	274747.74	81	—	98768.83	631375.15
	15	94117.60	278523.07		15	98836.15	649710.43
	30	94264.15	282391.29		30	98901.58	669115.62
	45	94408.90	286356.00		45	98965.14	689687.[illegible]

Gr.	m.	Sinus	Tangens	Gr.	m.	Sinus	Tangens
82	—	99026.80	711536.97	86	—	99756.40	1430066.63
	15	99086.59	734786.10		15	99785.89	1525705.17
	30	99144.49	759575.41		30	99813.48	1634985.55
	45	99200.49	786064.23		45	99839.16	1761055.88
83	—	99254.62	814434.64	87	—	99862.95	1908113.67
	15	99306.84	844895.73		15	99884.84	2081882.76
	30	99357.18	877688.74		30	99904.82	2290376.55
	45	99405.63	913093.48		45	99922.90	2545169.96
84	—	99452.18	951436.45	88	—	99939.08	2863625.33
	15	99496.85	993100.88		15	99953.36	3273026.37
	30	99539.62	1038539.71		30	99965.73	3818845.93
	45	99580.49	1088292.14		45	99976.20	4582935.12
85	—	99619.47	1143005.23	89	—	99984.77	5728996.17
	15	99656.55	1203462.23		15	99991.43	763[illegible]000.91
	30	99691.73	1270620.47		30	99996.19	11458865.01
	45	99725.02	1345662.53		45	99999.05	22918166.28
				90	—	10000000.00	Infinit.

Tabula hæc admodum fida eſt & emendata.

NOTA. Si reſeces tam ex Sinubus quam Tangentibus duas poſtremas notas; habes iſtos ſupputatos ad Radium 100000; vide §. 125. Incipit hæc Tabula a Sinu & Tangente 15 minutorum; & deinceps graditur ad alios, qui præcedentem 15 minutis ſuperant; quæ partium ratio plerisque Aſtrolabiis accommoda eſt, utpote in quibus unus gradus vulgo vix in plures quam 4 partes dividi ſolet. Si tamen Sinus & Tangentes etiam intermediorum minutorum deſideres, e.g. Sinum 2 grad. 23 min.; hunc ita obtinebis: Quære in Tabella Sinum dato proxime minorem, & alium proxime majorem: Subtrahe ab hoc illum (i.e. hic Sinum 2 Gr. 15 m. ⧦ 392598 a Sinu 2 Gr. 30 m. ⧦ 436194) & differentiam (43596) ita per Regulam auream applica: ut Differentia in minutis, queis hujus Tabellæ Sinus differunt (i.e. 15.) ad 8 (numerum minutorum, quo datus Sinus (2 Gr. 23 m.) proxime minorem ſuperat; ita Differentia inventa (43596) ad x ⧦ 23251. Hoc x adde excerpto ex Tabella Sinui proxime minori; & proveniet ex Summa 415849, Sinus §. 122. n. 5.
2 Gr. 23 m *.

* Fig. 93. Viciſſim ſi * datis Hypotenuſa AC 414 ped. & Crure BC 250 ped., per Propoſ. 32. Probl. 2. opereris, fiatque: ut 414 ad 250, ita Radius 10000000 ad x 6038405, Sinum Anguli A, veliſque jam ſcire accuratiorem hujusce anguli quantitatem; quære primo Differentiam D inter duos Tabellæ Sinus, quorum unus proxime major, alter proximè minor ſit invento x. 2do, quære differentiam d inter eundem x & Sinum in Tabula proxime minorem: Fiat nunc: ut Differentia D (34790) ad differentiam d (20255); ita 15 minuta ad 8, vel propius 9. Igitur 6038405 prope accedit ad Sinum 37 Gr. 9 m.

ERRATA.

Pag. 7. lineâ 13. Parallelarum, *adde*, usque ad oppoſitam. Pag. 11. lin. 17. *in margine*, *pro*, § 16. Cor. 1, *lege*, § 16. Cor. 2. Pag. 15. *in marg. pro*, * Fig. 22, *lege*, * Fig. 27. Et lineâ 7. *pro*, CD, *lege*, Cm. Pag. 18. *in marg. pro*, § 16. Cor. 3, *lege*, § 16. Cor. 2. *Et pro*, Pr. 9, *lege*, Pr. 6. Pag. 39. l. 17. *pro*, ca : : ab; & AB; BC, *lege*, ca : ab; & AB : BC. Pag. 43. l. 26. *pro*, a : (b, *lege*, a : b (. Pag. 57. l. 32. Baſin, *adde*, ponasque, notum obtuſum o cum ſuis lateribus. Pag. 58. l. 31. nempe, *adde*, fere. Pag. 71. l. 19. *pro*, 4736. *lege*, 5736. *Et* l. 24, *pro*, 5384, *lege*, 4384. Pag. 75. l. 24. *pro*, C. *lege*, D. Pag. 78. l. 19. MP &c. *adde*, 3tio, Anguli ad A, B &c. æquantur illis ad M, N &c. per Prop. 6. Pag. 85. l. 17. *pro*, 595, *lege*, 592. Pag. 91. lin. 27. connexas, *adde*, progrediare. Pag. 93. l. 15 & 16. *pro*, Chorographiis, *lege*, Topographiis. Pag. 96. l. 31. Radius ſit, *adde*, 50, illiusque proinde Diameter. Pag. 101. l. 5. *pro*, DBq = nBC, *lege*, nBC = DBq. Pag. 122. l. 15. *pro* ag, *lege* bg. In Tabulæ I. Figurâ 15. *pro*, C. *lege*, G.

INSTITUTIONUM MATHEMATICARUM

OPUSCULUM III.

MECHANICA:

AUTHORE

P. FRANCISCO HUBERTI, S.J.



Cum Permiſſu Superiorum.

FRANCOFURTI AD M. ET MOGUNTIÆ,

Sumptibus FRANCISCI VARRENTRAPP.

M D CC L V I.

PROOEMIUM.

Scientia, quæ de Corporum vi motrice agit, Mechanica a multis compellatur; rectius forte Dynamicam aut Phoronomiam dicerent. Magna, qua abundat, rerum & argumentorum ubertas multis eam variisque muniis occupatam exercet. Nam prout gravium æquilibrium expendit, ſtrictiore vocabulo *Statica* audit; quatenus Centrum gravium inquirit, *Centrobaryca* nuncupatur; dum Machinas & organa expendit faciliori aut breviori motui apta, preſſiore voce *Mechanica* ſalutatur. Aliàs leges motus æquabilis aut accelerati contemplatur; aliàs motum rectilineum, eumque vel ſimplicem vel Compoſitum, aliàs curvilineum & Pendulorum oſcillationes investigat. Nunc vires corporum mollium, durorum, & elaſticorum, nunc vias gravium projectorum ſcrutatur. Jam vim Centrifugam aut Centripetam, jam motum ortum ex percuſſione, jam reſiſtentiam mediorum, in

quibus Corpora moventur, aliave motus ſymptomata conſiderat & explicat.

Ad iſtam amplitudinem hodie excrevit Mechanica, quæ olim continebatur anguſtiſſimis arctata limitibus. Nam etſi Ariſtoteles Quinto Urbis Sæculo Librum de Mechanicis (a), & ſexto Urbis Sæculo Archimedes de æquiponderantibus ac Centro gravitatis quarundam Figurarum breviter (b) ſcripſerit: haud adeo magni tamen momenti ſunt, quæ ab ipſis ad nos usque pervenerunt. Neque qui poſtea Mechanicen tractarunt memorandos ei progreſſus attulerunt; niſi forte Vitruvium & Pappum idcirco prædicandos exiſtimemus, quod primus, Imperatori Auguſto coævus, in Architectura ſua nonnulla recenſeat machinamenta Architectonicæ præprimis & aquis movendis famulantia, alter, qui Sæculo IV. vixit, in Libro 8. Collect. Mathem. Vectem, Axem in peritrochio, trochleam, cochleam & cuneum explicet. His cum laude accenſeas Flavium Vegecium Sæculi IV. ſcripto-

(a) Utrum Liber iſte Ariſtotelem authorem habeat, merito dubitatur: quidquid ſit, majoris operæ & pretii illa ſunt, quæ hujus libri Commentatores poſtea de ſuo adjecerunt, puta Bern. Baldus Guaſtallæ Abbas 1621, & Joan. de Guevara Cler. Reg. Min. 1628; item Alexander Piccolomineus 1647.

(b) Credibile eſt, Archimedem plura ſciviſſe, quam ſcripſerit: ferunt enim, Machinam ab eo conſtructam, quæ orbe vitreo conclusa cœleſtes ſiderum curſus motu ſuo æmularetur; navem ipſo ſolo movente ex mari in littus fuiſſe adductam; machinas bellicas varii generis ab eo inventas, quibus Syracuſam adverſus Romanos propugnaverit usque adeo, ut paſſim Briareus & Centimanus a Romanis appellaretur.

rem, qui in L. 4. de Arte militari machinas bellicas Romanis uſitatas bene deſcripſit. A. 1570 Federicus Commandinus Centrobarycam edidit, opus commendatione dignum. Hunc ſecutus eſt A. 1577 Guidus Ubaldus e Marchionibus Montis, qui luculentius expoſuit primariarum machinarum naturam. Sæculo mox ſequente, XVIImo, latius protulerunt Mechanices fines Galilæus, qui primus ſagaci ingenio in lucem protraxit proprietates motus accelerati & Pendulorum, operam etiam ſuam conferente Jo. Bapt. Torricellio Galilæi diſcipulo; tum deinde Simon Stevinus in Hypomnematum Mathem. Tomo 4; P. Paulus Guldinus S. J. qui novo & raro invento docuit per centrum gravitatis in lineis, planis & corporibus quæſitum, ſuperficierum & Corporum dimenſiones Geometricas indagare; PP. Zucchius & Caſatus S. J.; P. Merſennus Ord. Minim.; P. Gaſpar Schottus S. J. tum in Magiæ ſuæ Part. 3, tum in Technica curioſa; Joan. Alph. Borellus Meſſanenſis tum in Tractatu de vi percuſſionis, tum in altero de motu animalium, qui a multis valde laudatur. Nec nihil de ſuo Carteſius contulit; cujus deinde principia ſecuti ſunt Sturmius & Franciſc. Bayle. Mechanicen altius provexerunt & inſigniter locupletarunt, Joan. Walliſius, Anglus, in egregio opere 1669 edito de Mechanica & motu, quod Wolffius abſolutiſſimum vocat; Chriſtophor. Wrennus; tum deinde Hugenius, cui maximam com-

mendationem & dignam apud poſteros memoriam comparavit præclariſſimus Liber de Horologio oſcillatorio 1673 edito, poſtquam jam A. 1657 Horologiis ipſe primus pendula adaptaſſet; Theorematum nonnullorum demonſtrationes de vi centrifuga ab Hugenio ſuppreſſas ſupplevit poſtea Keilius in Introd. ad veram Phyſicam, ubi & planiorem Mechanicen facili methodo Tironi tradit. His prioris Sæculi lucubrationibus adnumero Mariotti Tractatum de percuſſione corporum, Mechanicam Philippi de la Hire, Patris De Chales amplum Tractatum VIII. de Mechanica in Mundo Mathematico. Quibus accedunt Patris Pardies S. J. Diſcurſus de motu locali, & ejusdem Statica, ac Patris Bern. Lamy Traitez de Mechanique. Equidem de motu copioſe admodum & erudite ſcripſerunt PP. Honoratus Fabri, & Franciſcus de Lanis, S. J, ſed calamo Phyſico potius quam Mathematico. Inter Sæculi proxime elapſi lumina claret adhuc ſummi Vir ingenii Iſaacus Newtonus, qui ſublimia, quæ de motu maxime curvilineo attigit in præclaro opere Principiorum Mathem. Philoſophiæ Naturalis, tranſtulit ad Syſtema Univerſi novo auſu explicandum.

Noſtro hoc Sæculo Mechanicam partim illuſtrarunt partim promoverunt Varignonius; Joannes Bernouillius; Jacobus Hermanni in Libris 2. de Phoronomia; Grave-

ſandus in Elem. Phys. Math.; Muſschenbroeckius; Camus tum in Tractatu de viribus motricibus, tum in Curſu ſuo Mathematico; Deſaguillierius; Deidierius in Tractatu de Mechanica Gallice edito; Wolfius in Elem. Mathem. qui & antiqua & nova potiſſimam partem collegit; Eulerus denique copioſam conſcripſit Mechanicen, ſed ſublimem, nec absque Algebræ reconditioris præſidio adeundam. Multa, quæ ad hujus ſcientiæ lucem & incrementa faciunt, ſparſim reperies in Actis & monumentis variarum Academiarum & Societatum litterariarum. De Varignonio iſtud adhuc commemorandum, quod nova methodo, in viribus compoſitis fundata, Mechanicen late explanarit duobus Libris poſthumis. Exiſtimaverat quippe vir eruditus, per theoriam motus compoſiti laxari anguſtias Mechanices, utpote quæ nova hac ratione poſſet multo uberius, quam ante exponi. Neque diffiteor, pandi per eam latiorem tramitem ad explicanda hujus ſcientiæ arcana: ſed tamen Tironum captui, ni fallor, minus accommodam recte pronunciavero.

Nec tacenda hoc loco celebris illa controverſia noſtro ævo enata de viribus mortuis & vivis, quæ eruditos in diverſas partes traxit. Primus erat Leibnitius, qui vires in duas claſſes diviſerat, *mortuas* nempe & *vivas*, aſſerens primas adinvicem ſe habere in Ratione Compoſita Maſſarum & velocitatum, alteras au-

tem ſe habere in Ratione Compoſita Maſſarum & *duplicata* velocitatum, in quo poſteriore tota lis verſabatur. A Leibnitio ſtetere Joann. Bernouilli, Hermannus, Polenus, Wolffius, Muſchenbroeckius, Graveſandus, P. Riccati S. J: vires vivas e medio naturæ ſublatum ibant Mairanus, Deſaguillierius, Deidierius, P. Boſchowich S. J. in Diſſert. de viribus, P. Scherffer S. J. in ſua Phyſica Viennæ 1752 edita, Zannoti, aliique.

Hæc de Mechanices fatis & incrementis ſatis ſunto.

MONITUM
AD
TIRONEM.

Qui leviore quidem, utili tamen Mechanices cognitione tingi deſiderat, ſatis habet, ſi, quæ in tribus primis Capitibus proponuntur, comprehendat. Propoſitionem tertiam cum 2 primis Corollariis ſibi Tiro familiariſſimam reddat, antequam ultra progrediatur: hoc enim uno bene percepto, plana jam erunt reliqua, cum nihil fere ſit in Capite I. II. III & IV, quod non ex iſto fonte deducatur.

Tum in hoc tum in ſequentibus Opuſculis ſuppono Tironem in Arithmetica & Geometria minime hoſpitem, cum iſtas frequentiſſime oporteat demonſtrationibus adhibere, & modis quidem verbiſque brevibus, ne, ſi etiam hæc uberius explicarentur, demonſtrationes evaderent ad faſtidium prolixæ & intricatæ.

Quando leges, quantitatem primam habere majorem Rationem, quam tertia ad quartam, in-

telli̇ge, primæ Rationis Antecedens continere vel ſæpius ſuum conſequens vel plures ſaltem hujus aliquotas, quam contineat ſecundæ Rationis Antecedens de ſuo. Viciſſim prima quantitas habebit minorem Rationem ad ſecundam, quam tertiæ ad quartam, ſi prima continuerit minus de ſuo conſequente, quam tertia de ſuo.

Menda, quæ in typum irrepſerunt, atque ſub finem libri notata ſunt, ante lectionem corrigere non omittes. Quod & deinceps faciendum.

ELEN-

ELENCHUS OPUSCULI.

Caput I. Theoria Vectis. - - Pag. 1.

Caput II. De Centro gravitatis. - 19

Caput III. De Machinis ſimplicibus, Libra, Statera, Axe in Peritrochio, Trochlea, Plano Inclinato, Cochlea, Cuneo - - - 31

APPENDIX. De Machinis Compoſitis. 49

Caput IV. De Compoſitione virium 58

APPENDIX. De primario Statices fundamento. - - - - - - - 66

Caput V. De Motu gravium tam libero, quam per Plana Inclinata, & de Pendulis. - - - 71

INSTITU-

INSTITUTIONES MECHANICÆ.

Mechanica latiſſime ſumpta, eſt ſcientia de motu ac viribus motricibus. Vaſtiſſimus eſt hujuſce ſcientiæ ambitus; quem quia Elementaris Matheſeos anguſtiæ haud capiunt, Mechanicen cogimur preſſius hic accipere; atque ſub hujus notione vires duntaxat Machinarum vulgarium, Potentiarum plurium idem punctum trahentium facultates, ac gravium niſum lapſumque comprehendemus.

CAPUT I.
Theoria Vectis.

ARTICULUS I.
Præmittuntur Definitiones, Axiomata, Postulata.

DEFINITIONES.

§. 1. DEFINITIO I. *Directio*, vel *Linea Directionis* eſt Linea recta, ſecundum

quam corpus, vel movetur, vel moveri nititur.

§. 2. DEFINITIO II. *Spatium* eſt illa Linea, quam Corpus, inſtar puncti conſideratum, percurrit.

§. 3. DEFINITIO III. *Celeritas* vel Velocitas eſt illa Corporis proprietas, qua certo tempore certum ſpatium percurrit.

§. 4. Imo. Ex ſpatiis intra certum tempus percurſis celeritatem metimur, & diverſas celeritates inter ſe comparamus. Ita ſi intra horæ unum Minutum ſecundum Corpus A percurrat unum pedem, B vero pedes tres; movebitur B triplo velocius ipſo A. IIdo. Perſiſtente eadem celeritate ſpatium percurſum augetur & multiplicatur adinſtar temporis. Unde ſi prædictum Corpus B uno min. 2do moveatur per tres pedes; idem intra 4 min. 2da percurret quater tres, i. e. 12 pedes. IIItio. Idcirco ſi iſtud ſpatium (12) dividas per tempus (4), innoteſcet celeritas (3). Pariter ſi ſpatium percurſum (12) dividas per celeritatem (3), invenietur tempus (4) *. IVto Quia quo celerius Corpus fertur, eo minore tempore, & quo tardius movetur, eo majore tempore indiget; hinc manente eodem ſpatio percurrendo, erunt celeritates in Ratione inverſa ſeu reciproca temporum.

* Arithm. Prop. 10.

§. 5. DEFINITIO IV. *Maſſa* eſt quantitas materiæ, quæ Corpus componit.

§. 6. DEFINITIO V. *Potentia* eſt vis, agens in obſtans Corpus, vel ad hoc ex loco movendum, vel ad ejus motum, quem actu habet, alterandum.

§. 7. Niſus, preſſio, ſolicitatio ad motum, quam Potentia aliqua exercet in obſtans Corpus, quin tamen actu ſequatur motus (qualis eſt E. G. in lapide in menſam gravitante, vel in elatere tenſo & ſeſe reſtituere conante,

aut in aqua ſtagnante oppoſitum clauſtrum perrumpere conante) vocatur *Vis Mortua*: quæ & ab aliis compellatur Vis initialis. At vis motrix cum motu actuali conjuncta, vocatur *Vis Viva*. Talis eſt in lapide deciduo, in aqua cum impetu per canalem proruente. Tab. I.

§. 8. DEFINITIO VI. *Gravitas* eſt conſtans niſus Corporum, libere ſibi commiſſorum, verſus Centrum Terræ.

§. 9. DEFINITIO VII. *Machinas* voco organa illa & inſtrumenta, quæ nobis ſerviunt vel ad gravia ponderanda, vel ad majores moles cum compendio virium temporisve movendas aut ſuſtinendas. Hujusmodi ſunt Vectis, Bilanx, Statera, Axis in peritrochio, Planum inclinatum, Trochlea, Cochlea, Cuneus.

§. 10. DEFINITIO VIII. *Vectis* eſt Pertica rigida, Corporibus vel movendis vel ſuſtinendis deſtinata, in cujus extremitatibus punctoque inter has intermedio diverſimode diſponuntur Potentia, Onus, Fulcrum. Ex triplici autem diſpoſitione triplex oritur vectis genus. * *Vectis primi generis* eſt, in cujus extremitatum una A applicatur Onus movendum vel ſuſtentandum, in altera B Potentia, in medio C fulcrum F, Græcis ὑπομόχλιον. Vectis iſte vocatur etiam *Heterodromus*, eoquod ejus puncta extrema moveantur in diverſas plagas. * *Vectis ſecundi generis* eſt, in cujus extremitatum una eſt Fulcrum, in altera Potentia, in medio Onus. Vocatur & *Homodromus*, quod & Pondus & Potentia in illo moveantur

*Fig. 2.

*Fig. 6.

Tab. I. unà verſus eandem plagam. *Vectis tertii generis* eſt, in cujus extremitatum una eſt Fulcrum, in altera Pondus, in medio Potentia.

*Fig. 2. * Punctum C, circa quod Vectis aut aliud quodvis Corpus movetur, vocatur *Centrum motûs*. *Diſtantia* Potentiæ & Oneris ſumitur ſemper a Vectis fulcro ſeu Centro motûs usque ad punctum, cui applicatur Potentia & onus. Sic *in Fig.* 2. Diſtantia Potentiæ P eſt CB, & Ponderis O eſt AC.

§. 11. DEFINITIO IX. Duæ vires ſunt *in æquilibrio*, quando, cum in ſe mutuo agunt, neutra valet alteram vincere. Atque tunc etiam dicuntur habere Momenta æqualia. *Momentum* autem vocamus illas vires, quas aliqua Potentia habet in præſente diſpoſitione: etenim ut poſtea patebit, idem corpus grave nunc majus nunc minus momentum obtinet, prout a fulcro magis minusve removetur.

§. 12. DEFINITIO X. *Linea Horizontalis* eſt, quæ lineam rectam e Centro Terræ eductam ſecat perpendiculariter. *Vel*, eſt Tangens Circuli e Centro Terræ deſcripti. Ipſa autem Linea e Terræ Centro educta vocatur *Verticalis*. Talem refert filum tenſum pondere appenſo & libere deorſum nitente ac quieſcente.

AXIOMATA.

§. 13. I. Si duæ actiones æquali niſu in ſe agentes ſervant æquilibrium; imminutâ unius reſiſtentiâ victoria erit penes alteram.

II. Si virtuti alicui motrici ſubſtituatur Potentia, viribus æqualis; idem effectus ſubſiſtet. Tab. I.

Sic ſi in Vecte AB * oneri O ſubſtituas in A manum hominis, tantundem deorſum urgentem quantum antea ipſum O; manebit idem, qui ante, effectus. * Fig. 2.

III. Actiones & vires, æqualia Corpora per æqualia ſpatia eodem tempore agentes, ſunt æquales.

IV. Vires oppoſitæ, æquilibrium inter ſe efficientes, ſunt æquales.

V. Cauſæ eſt proportionatus effectus, & effectui Cauſa. Sic Cauſa duplo triplove major producit effectum duplo triplove majorem.

VI. * Si Potentia P, directione BP trudat vel trahat Corpus vel lineam rigidam AB; eadem vi, qua punctum A trahitur, trahetur etiam quodvis aliud punctum intermedium *m* vel *n*, exiſtens intra eandem directionem AB. * Fig. 1.

COROLLARIUM. Manebit idem proinde effectus, ſive Potentia trahens applicetur puncto A, vel *m*, vel *n*; modo & eadem Potentia & in eadem directione perſeveret. Similiter ſi Potentia trahat per filum tenſum, idem effectus ſequitur, ſive trahat in fili hujus principio, ſive medio, ſive fine. Id quod & ab experientia certum exploratumque eſt.

OBSERVATIO.

§. 14. Ut Corpus celerius moveatur, indiget impetu majore.

Advertimus nempe, cum velocitate creſcere impetum. Hinc globus plumbeus ſclopeto excuſſus validiſſimo ictu frangit tibiam, quam nunquam lædet, dum manu projectus tardiore motu fertur.

Ut globus a tormento bellico evibratus celeritate sui motus adaquat vires ingentis Arietis murarii, tardius in murum impacti.

HYPOTHESES ET POSTULATA.

§. 15. I. Sermo hîc nobis duntaxat erit de Corporibus ſolidis. Nam de liquidis Hydroſtatica aget.

II. Abſtrahimus hîc a frictione, quæ occurrit in machinis aliisque impedimentis eorum motum retardantibus, infringentibus; a gravitate item vectis, linearum aut funium, per quos fit tractio. Hæc enim cum pro diverſitate organorum & materiarum diverſiſſima ſint; ſane ſi ad ipſa attenderemus, nihil univerſaliter ſtatui de Machinarum ipſarum natura poſſet. Hinc

III. Vectem, & quidquid huic æquipollet, conſiderabimus inſtar Lineæ Mathematicæ inflexilis, & gravitate carentis; niſi aliud expreſſim indicatum fuerit.

IV. Dum Pondera aut Maſſas comparabimus, has homogeneas ſupponemus. Homogenea autem hic vocamus illa, quorum partes, ſub eodem volumine ſive ſub eadem magnitudine comprehenſæ, ſunt æquales.

ARTICULUS II.

Vectis primariæ proprietates.

PROPOSITIO I.

§. 16. *In Vecte Heterodromo æqualia Pondera, in æquali a fulcro diſtantia ſuſpenſa, ſunt in æquilibrio.*

DEMONSTRATUR. Eſt talis utriusque ponderis ad agendum reſiſtendumque diſpoſitio & cum machina connexio, ut quod ratione virium uni convenit, competat & alteri. Ergo æquali niſu in ſe agentia ſervant æquilibrium. *Q. e. d.* Tab. I.

LEMMA.

§. 17. *Duorum Circulorum* (C & *c*) *Peripheriæ* (P & *p*) *ſunt ad ſeinvicem, ſicut ipſorum Diametri* (D & d) *vel Radii* (R & r).

DEMONSTR. P : D : : 314 : 100. * Et *p* : *d* : : 314 : 100. Ergo eſt, P : D : : *p* : *d*, & *alternando* P : *p* : : D : *d*. Demum ſicut P ad *p*, ita (ipſarum D & *d* dimidia) R & *r*. *Q. e. d.*

PROPOSITIO II.

§. 18. *Si Vectis* AB *moveatur circa punctum* C; *erunt tum Arcus* (AN, BS) *a punctis* A & B *deſcripti, tum iſtorum ſinus* MN, RS *inter ſe, uti Radii* AC, CB, *vel* CN, CS. Fig. 3.

DEMONSTR. I[mo]. Ob æquales angulos verticales ad C, arcus AN, BS, ſunt ſuarum Peripheriarum partes ſimiles. Sed Peripheriæ, ceu Tota, ſunt ad ſe uti Radii *; ergo etiam Totorum partes ſimiles, i. e. dicti Arcus. *Quod erat primum.*

* *Lemma præced.*

II[do]. Triangula CMN, CRS, ſunt æquiangula. Igitur ut CN ad CS, ita MN ad RS. *Quod erat alterum.*

PROPOSITIO III.

§. 19. *Si in Vecte* MN *ſint Pondera* A & B *inter ſe reciproce, uti ipſorum diſtantiæ, hoc eſt, ſi ſit* A : B : : BC : CA; *erunt in æquilibrio.* Fig. 5.

DEMONSTRATUR. Fiat Vectis affabre elaboratus, æqualis ubique craſſitiei, cujus punctum medium ſit ſimul centrum motus. Vectis bracchia CM, CN, ſint utrimque in æqualem partium numerum (v.g. in 100) diviſa. Jam ſi Pondus A ſit ad Pondus B, ut 2 ad 1, vel ùt 3 : 5, vel quomodocunque : & ſit diſtantia CB ad diſtantiam AC ùt 2 : 1, vel 3 : 5 &c.; animadvertetur conſtare æquilibrium.

§. 20. *Quomodo talis Vectis, ad capiendum experimentum appoſitus, ſub figura oblongi parallelepipedi parandus, docet Leupoldus in Theatro Machinarum Gener. p. 11. Ejus ſtructuram etiam colliges ex §. 50, & Propoſitione 15, ejusque Scholio. Pro rudiore praxi accipe Regulam Tigneam, pollicem circiter latam, 20 vel 24 pollices longam, quarta pollicis parte craſſam. Per medium plani lati duc lineam, quam divide in plures pro lubitu partes, æquales; puncta diviſionis perfora ſubtiliter; per punctum medium transverſim age axiculum ſupra fulcrum mobilem: ſi bracchium unum alteri præponderet, per contrapondium prius vecti ſitum horizontalem tribue, & appenſis per ſubtilia fila ponderibus experimenta inſtitue.*

§. 21. NOTA. Brevitatis ergo diſtantiam majorem vocabimus D, & minorem, *d*. Pondus majus dicemus O, minus P appellabimus Potentiam. Quamvis autem tam ipſi O quam P nomen Potentiæ recte conveniat; iſtud tamen minori Ponderi idcirco tribuemus, quod vires obeat Potentiæ animatæ, Machinæ alicui applicatæ, quæ plerumque ſecundum finem Inſtrumentorum Mechanicorum minor deſideratur, quam ſit onus ſuſtentandum vel levandum. Igitur habebitur æquilibrium, quando eſt O : P : : D : *d*. Vide Fig. 2.

COROLLARIUM I.

§. 22. Quando Productum ex diſtantia *d* in Onus O, nempe O × *d*, æquatur Producto ex P × D; habetur æquilibrium: quia tunc erit * ùt O : P : : D : *d*. Et quia prior Propor-

* *Arithm. Prop. 7.*

tio, *alternando* poſita, præbet hanc, O:D:: P:*d*, in qua eſt O×*d* = P×D; patet, etiam tunc æquilibrium obtineri, quando producta emergunt utrinque æqualia, dum quodvis pondus fuit per ſuam diſtantiam multiplicatum.

COROLLARIUM II.

§. 23. Eſt etiam æquilibrium ac conſequenter virium in ſe agentium æqualitas, quando ambo Pondera ſunt ita diſpoſita, ut ſi aliquis fieret motus, velocitates ſe haberent reciproce uti ipſa Pondera. Nam eſt æquilibrium, quando Pondera ſe habent inverſim ut diſtantiæ: ſed quales ad ſe invicem ſunt diſtantiæ, tales etiam ſunt ipſæ velocitates, i. e. arcus AN, BS, qui repræſentant ipſa ſpatia percurrenda atque velocitates: Ergo. Quare ſi velocitatem ipſius P vocemus V, & minorem Oneris vocemus *v*, erit æquilibrium, ſi ſit O:P::V:*v*. Id eſt, duo inæqualia Corpora O & P æquilibrantur, ſi, quantum uni reſpectu alterius decedit quoad materiam, tantundem ei compenſetur quoad velocitatem ad quam eſt vi machinæ diſpoſitum. Sive, vires Mortuæ Maſſarum contra ſe nitentium ſunt æquales, ſi celeritates aut ſpatia percurrenda ſint ipſis Maſſis reciproca; ſive ſi Productum ex Maſſa una in ſuam celeritatem ſit æquale Producto ex Maſſa altera in ſuam celeritatem, id eſt, ſi ſit O×*v* = P×V. Fig. 2. ex 3.

COROLLARIUM III.

§. 24. Eſt æque difficile levare Pondus O

Tab. I. per ſpatium ſimplum, quam eodem tempore Pondus ſubduplum P levare per ſpatium duplum. Idem eſt de quavis alia Proportione ſimiliter reciproca.

COROLLARIUM IV.

Fig. 2. §. 25. Si turbetur Proportio reciproca Ponderum & diſtantiarum, non ſubſiſtet amplius æquilibrium. Nam I^mo^. Si ſit major Ratio ipſius O ad P, quam BC ad CA (ut ſi O foret ad P velut 3 : 1; foret autem BC ad CA tantum ut 2 : 1) ſuperabitur & attolletur P ab O. Cogita enim detrahi ipſi O tantum materiæ, donec fiat O : P : : D : *d* : : 2 : 1; erit æquilibrium. Ergo ſi ipſi O reddas, quod demptum fuit; fiet gravius ac fortius, ſuperabitque ipſum P. II. Pariter ſi ſit major Ratio ipſius P ad O, quam CB ad CA; ſuperabitur O ab ipſo P. III. Similiter ſi ſit major Ratio diſtantiarum aut velocitatum, quam reciproce Ponderum, non ſubſiſtet æquilibrium. Ex quo porro ſequitur, IV. Corpus minus P poteſt motu vincere majus O, ſi minus feratur celeriùs majore.

COROLLARIUM V.

§. 26. Pondera æqualia (O, P) ſuſpenſa ex inæqualibus a fulcro diſtantiis, non ſervant æquilibrium. Neque Pondera inæqualia ſuſpenſa ex æqualibus a fulcro diſtantiis. Quoniam hîc turbatur reciproca diſtantiarum & Ponderum Proportio.

COROLLARIUM VI.

§. 27. Quando in Vecte Heterodromo habetur æquilibrium; etiam Pondera O & P erunt ad ſe uti reciproce diſtantiæ. *Eſt converſa præſentis Propoſitionis*. Alias namque eſſet æquilibrium, & non eſſet: eſſet, ut ſupponitur; non eſſet, prout conſtat ex Coroll. 4.

COROLLARIUM VII.

§. 28. Si æqualia Pondera O & P primò æquilibrentur ex æqualibus a fulcro diſtantiis (*per Prop.* 1.) ac poſtmodum P removeatur ad diſtantiam duplam; acquiret P vires duplo majores, nempe æquales ſuſtentandis duobus O; ſi porro removeatur ad diſtantiam triplam, quadruplam &c. acquiret vires triplo, quadruplo &c. majores reſpectu ipſius O. Eodem modo ſi ipſius O diſtantia prima gradatim minueretur; minueretur pari ratione vis ipſius P ad ſuſtentandum præciſe requiſita. Atqui uti creſcit vel decreſcit diſtantia, ita etiam creſcit vel decreſcit velocitas: Ergo vis Corporis P reſpectu obſtaculi O creſcit vel decreſcit pro Ratione creſcentis vel decreſcentis velocitatis. Idem viciſſim valet de Corpore O, comparato cum P. Ergo dum Maſſæ Corporum O & P multiplicantur per ſuam celeritatem, ad quam reſpective vi machinæ disponuntur; Producta exhibent iſtorum Corporum vires reſpectivas.

COROLLARIUM VIII.

§. 29. Quoniam itaque Corporum vires

Tab. I. mortuæ, agentes in ſeſe, æſtimantur (*ex Coroll. præced.*) per Producta ex Maſſa in celeritatem; poterunt hæ vires exhiberi per Rectangula *, quorum Baſes repræſentent Maſſas M & *m*, altitudines autem monſtrent velocitates V & *v*. Sed talia Rectangula ſunt * in Ratione compoſita Baſium & Altitudinum; Ergo & vires Corporum, preſſione in ſe agentium, ſunt ad ſe in Ratione compoſita Maſſarum & velocitatum.

* Fig. 4.

* *Geomet. Prop.* 30.

COROLLARIUM IX.

§. 30. Si Ponderibus, O aut P, ſubſtituas alias Potentias, v. g. manus, quæ per fila ad Vectem perpendicularia eâdem, quâ ante ipſa Pondera vi, deorſum nitantur; manebit idem effectus. Imovero ſi & fulcrum C, & Potentiæ iſtæ invertantur, ita ut iſtæ nunc eâdem vi, qua mox ante deorſum trahebant, ſurſum nitantur *: aut ſi vectem A B, horizontaliter ſitum & circa fulcri punctum C ceu clavum rotabilem, nitantur Potentiæ O & P in prioribus a fulcro diſtantiis trahere directionibus perpendicularibus juxta ac horizontalibus; perſtabit adhuc æquilibrium virium, in ſe mutuo agentium. Nam quod præſtant corpora gravitatis niſu directione verticali agentia, idem efficient ſervatis reliquis, aliæ quævis Potentiæ per aliam directionem agentes.

Fig. 2.

* *Cogita tantum, Tabulam I. cum Fig. 2. inverti.*

COROLLARIUM X.

§. 31. I. Dato Pondere O & diſtantiis *d*, D, poteſt inveniri Potentia P; ſi fiat: ut D:

d : : O : $\frac{d \times O}{D}$ = P. II. Viciſſim datis Potentia Tab. I.
P, & diſtantiis D, d, invenietur ipſum O, ſi fiat d : D : : P : O. III. Datis Ponderibus O & P, & una diſtantiarum (d), invenietur diſtantia altera D, ſi fiat, ut P : O : : d : D. IV. Datis Ponderibus ex Vecte ſuſpenſis, definietur Centrum motus pro æquilibrio, ſi Vectem dividas in duas diſtantias, Ponderibus reciproce proportionales. *Vel*, Quia datis O, P, debet eſſe O : P : : D : d; invenies diſtantiam d, ſi fiat *componendo* O + P : P : : D × d : d; tunc enim, ob (P + D + d) = (O + P + d), ſi Productum ex P in totam vectis longitudinem dividas per Summam Ponderum, prodibit d: quemadmodum & ex P + O : O : : D + d : D, inventurus es ipſam D.

§. 32. SCHOLION I. Quare ad demonſtrandam hanc Propoſitionem, quæ ſane primaria eſt, ſolum experimento utar, nullo autem argumento ex ratione petito, expoſui in Diſſertatiuncula 1752. Fuldæ edita, ubi monſtravi, vulgares demonſtrationes paſſim adhiberi ſolitas mihi haud ſatisfacere, imo ex his nonnullas manifeſto paralogiſmo laborare: quod idem fors alia occaſione uberius oſtenſurus ſum. Paucis tamen ſuper hoc argumento diſſeram ſub finem Capitis IV.

SCHOLION II. Ad explicandas velocitates viasque a Potentia & Onere percurrendas, in Figuris præſentibus aſſumpſimus notabiles quantitates arcuum vel linearum, idque ſolum oculi juvandi cauſâ. Atenim pro veriore Mechanices intelligentia imaginandum eſt, ductos eſſe arcus, valde exiguos, cum lineis rectis phyſice coincidentes, per quos concipiendum eſt inchoari motum, id quod & ſequentibus applicari velim.

PROPOSITIO IV.

§. 33. *In Vecte Homodromo* AP *eſt æquilibrium, ſi ſit Onus* O *ad Potentiam* P, *uti reciproce ſunt ipſorum diſtantiæ* AP, AO. Fig. 6.

** hypoth.* DEMONSTRATUR. Eſt O:P::AP:AO*. Et uti AP ad AO, ita velocitates aut ſpatia percurrenda per arcus P*m*, O*s*. Ergo cum illa Pondera ſint in Ratione reciproca velocitatum, ſervabunt æquilibrium*. *Q. e. d.* ** Pr. 3. Cor. 2.*

§. 34. COROLLARIUM I. Si duæ Potentiæ A & P (vel etiam duo fulcra applicata in A & P) geſtant horizontaliter idem onus O; Potentia A minus diſtans ab onere, gravabitur magis, quam altera P, ab eodem remotior. Nam concipe *primo* Potentiam A inſtar fulcri, & P tanquam Potentiam; erit ut AO:AP::P:O; igitur ſi ſit E. G. AO ad AP ut 1 ad 3, geſtabit P tertiam partem ipſius O. 2do. Cogita nunc ipſum P inſtar fulcri, & A inſtar Potentiæ: Quia igitur eſt OP:AP::A:O; OP autem ad AP ſe habet, in dato caſu ut 2:3; geſtabit A duas tertias ipſius O.

§. 35. COROLLARIUM II. Ambæ Potentiæ ſimul geſtant totum onus O; partiuntur tamen illud inter ſe in Ratione inverſa diſtantiarum.

SCHOLIA GENERALIA.

I. Propoſitionem hanc quartam experimentaliter demonſtraturus, affigat Vectis puncto extremo P filum verticaliter aſſurgens, idque vel circumductum trochleæ, vel annexum uni bilancis bracchio; atque antequam Vectis onere gravetur, is per oppoſitum pondus ope trochleæ aut bilancis ad æquilibrium horizontale revocetur.

II. Ex Vecte Heterodromo ſequentia intelliguntur & explicantur: I. Vis Forficum; nam clavus in his eſt inſtar hypomochlii, circa quem duo vectes verſantur. Unde facilius ſcinditur Corpus ſecandum, quando id propius clavo admovetur. Si vero unum

ſaltem bracchium fiat ſatis longum; apta efficitur ad diſſecandas ipſas adeo laminas metallicas, ſat alioqui ſpiſſas. II. Forceps vectem refert, cujus hypomochlion eſt vel clavus, vel fulcrum quodvis hanc ſuſtentans. Potentiarum una bracchiis applicatur, altera agit ibi, ubi retinacula Corpus tenendum mordent. III. Si clavis annulo baculum, ceu vectem, inſeras; exigua vi opus erit, ut hanc circumagas. IV. Liquet porro, cur ſi extremitatem haſtæ, quæ ſcapulæ innititur, proxime ad ſcapulam manu retineas, ſentias ingens ejus pondus: nimirum ut æquilibrium fieret, deberet illi extremitati magnum appendi pondus, cujus vicem interea dum manus obit, preſſionem exercet in ſcapulam. V. Cur ſuper genu facilius frangas baculum longiorem quam breviorem; facilius in medio, quam circa extremitatem. VI. Cur Operæ vectis adminiculo moveant ingentis molis lapides. Tab. I.

III. Ex proprietate Vectis ſecundi generis diſcitur. I. Quomodo duo homines inæqualium virium partiri inter ſe debeant onus ex vecte portandum: ut ſi vir robuſtus in A *, & puer in P ferre debeant onus 100 librarum, puer autem ferendis ſolum 10 libris par exiſtat; geſtabit iſte oneris partem viribus ſuis proportionatam, ſi diſtantia A O ſit ſubdecupla diſtantiæ A P. II. Hi ipſi haud facilius portabunt onus 100 librarum vecte longiore quam breviore; modo in utroque ſervetur eadem diſtantiarum Ratio: id quod minime hic notaſſem, niſi a Mechanices ignaris in dubium vocari atque adeo negari, expertus didiciſſem. III. Patet, cur dentes molares, utpote fulcro propinquiores facilius quam alii frangant & mandant. IV. Gladiatoris ſica facilius vincitur & a linea directionis detorquetur, cum impetitur pars cuſpidi vicinior. V. Colligitur vis cultri inciſorii, quo pharmacopolæ utuntur ad lignorum radices concidendas. VI. Navis gubernaculum & remum rectius ad vectem ſecundi generis revocaveris: nam in aqua eſt fulcrum, pondus in navis ſcalmo. VII. Etiam Navis Malum non immerito cum Vecte ſecundi generis comparabis. Etenim in navis fundo eſt fulcrum, in tabulato eſt onus movendum, in mali parte ſuperiore viget Potentia, quam conſtituit ventorum impetus, in vela & antennam ibidem agens. Hinc quo malus altior, eo pronior navigii curſus. * Fig. 6.

IV. Vectem tertii generis hucusque non attigi, quod is nullam afferat virium, ſed ſolius temporis compendium. Eſt autem is nihil aliud, quam Vectis ſecundi generis inverſus. Unde ſi in Vectis A P * puncto O applicata foret Potentia, & in P Pondus, haberet ſe Potentia ad Pondus ut A P ad A O. Vectem tertii generis experimur in claudenda aperiendaque janua ad anſam apprehenſa: patet autem ex dictis, aptiorem motui eſſe anſam ſeræ propinquiorem, quam remotiorem ab iſthac. Idem vectis genus exercemus in bracchio extenſo, dum manus grave quodpiam ſuſtinet; in medio enim inter manum & ſcapulam ceu fulcrum, viget * Fig. 6.

Potentiæ. Simile vectis genus formamus, dum haſtam horizontalem ad unum ejus extremum manu in pugnum contracta levamus; fulcrum enim tunc exiſtit in vola, Potentiæ vices obit index digitus ſuſtentans, Pondus per haſtam diffunditur.

Tab. I.

ARTICULUS II.

De Vecte non horizontali, angulari, & tractionibus obliquis.

PROPOSITIO V.

Fig. 8. §. 36. *Si detur Vectis angularis* DCB, *rotabilis circa punctum* C, *æqualium bracchiorum* DC, CB; *& Potentiæ*, P *&* Q, *trahant niſu æquali directionibus* DP, BQ, *ad bracchia perpendicularibus: conſtabit æquilibrium.*

DEMONSTRATUR ut Propoſitio I. Præterea ſi manentibus (ut ſupponitur) iisdem directionibus fieret motus; arcus deſcribendi aut ſpatia percurrenda eſſent æqualia, uti ipſæ Potentiæ. Ergo rurſus eſt æquilibrium, *per Prop. 3. Cor. 2.*

PROPOSITIO VI.

§. 37. *Si in Vecte angulari* DCb *inæqualium bracchiorum* DC, Cb, *duæ Potentiæ* P *&* p *trahant directionibus perpendicularibus: erit æquilibrium, ſi ſit ut* p *ad* P, *ita reciproce* DC *ad* Cb.

DEMONSTRATUR. Concipe circulos ex C ductos per *b* & D. Jam ſi punctum D percurrat arcum DA, percurret *b* arcum *b*F, ſimilem ipſi AD, & æqualem ipſi *mn*. Atqui arcus DA, *mn*, tanquam ſpatia percurrenda ſunt uti Radii DC, *m*C, ſive DC, C*b*;

p au-

p autem & P ſunt uti DC, C*b* *: ergo Potentiæ iſtæ ſunt conſtitutæ in Ratione reciproca diſtantiarum aut velocitatum; proinde & in æquilibrio *. *Q. e. d.* * *hypoth.* * *Prop 3. Cor. 2.*

§. 38. COROLLARIUM. Si concipias Vectem DC*b* deſcriptum in plano circulari DOB, ductumque Circulum concentricum *mb*; erit æquilibrium, ſi Directiones DP, BQ fuerint Tangentes horum Circulorum. Nam & ipſæ hæ Tangentes ſunt perpendiculares Radiis DC, C*b* (per Geometr. Prop. 19.) Ergo.

PROPOSITIO VII.

Tab. I. Fig. 8.

§. 39. *Si Vectem angularem* DCB *trahat Pondus* Q *directione perpendiculari; in altero autem extremo* D *eundem trahat Pondus* O *directione ad vectem obliqua* DnO: *erit æquilibrium, ſi fuerit* O *ad* Q, *uti reciproce distantia* BC *ad diſtantiam* Cn, *quæ ipſa eſt linea ex Centro motus* (C) *ducta perpendiculariter in ipſam lineam Directionis* DO.

DEMONSTR. Concipe Planum circulare DOB, gravitatis expers, mobile circa Centrum C, & in Plano hoc deſcriptum Vectem DCB, eſſeque æquilibrium inter O & Q. Jam quia in ea Plani lineam rigidam DO, quodvis punctum æquali vi trahitur a Potentia O (*per Ax.* 6.); poterit, manente eodem effectu, concipi Potentia O eſſe applicata in puncto *n*. Atqui ſi hoc fiat, erit Directio *n*O ad Vectis *n*CB bracchium *n*C perpendicularis, eritque tunc æquilibrium, ſi ſit O:Q::BC: C*n*: ergo etiam eſt idem effectus ac conſequenter æquilibrium in Vecte DCB. *Q. e. d.*

Tab. I. Cæterum quod de Ponderibus O & Q dictum, valet de quibusvis aliis Potentiis juxta §. 30.

§. 40. COROLLARIUM I. Sublato Plano orbiculari, relicto tamen Vecte angulari DCB, dabit Perpendicularis ex Centro motus C in directionem DnO ducta Potentiæ obliquæ diſtantiam, ſecundum quam vires iſtius æſtimandæ ſunt.

Quod hic Vecti primi generis, idem ſecundi generis Vecti conveniit: ut ſi in Vecte obliquo MCn, *cujus fulcrum eſt in C, pendeat pondus x ex m, & Potentia p trahat perpendiculariter applicata; erit CM diſtantia Potentiæ, & (poſt demiſſam verticalem mnx) erit Cn diſtantia oneris, quia Circulus mA eadem vi trahitur, ſive pondus ſit applicatum in m ſive in n. Adeoque æquilibrium erit, ſi ſit p ad x, uti nC ad CM. Si vero Potentia p non foret applicata perpendiculariter, ſed per verticalem bM, diſtantiam Potentiæ præberet horizontalis Cb.

*Fig. 9.

*Fig. 11. §. 41. COROLLARIUM II. *Si Vectem rectum AB trahant duæ Potentiæ obliquæ P & O; ductis ex C perpendicularibus Cm, Cn, erit æquilibrium, ſi ſit $O : P :: nC : mC$.

Fig. 12. §. 42. COROLLARIUM III. Si detur Vectis AnCB quomodocunque curvus, ſed tamen rigidus, quem Potentiæ O & P trahant directionibus BO, AP; erit æquilibrium, ſi ſit P ad O, uti mC ad Cn, quæ ambæ ſunt perpendiculares ex Centro motûs in directiones ductæ. Æquivaletque Vectis curvus AnCB, angulari rectilineo ACB.

Fig. 9. §. 43. COROLLARIUM IV. Si linea rigida CB ſit gyrabilis circa punctum extremum C, pendeatque ex altero B pondus O; trahat autem Potentia P directione perpendiculari BP: eruetur æquilibrium inter O & P, ſi ex B

concipias erigi verticalem B A, ad quam ducatur perpendicularis C A: tunc enimvero æquilibrium dabit hæc Proportio, A C : C B :: P ; O. Perinde enim ſe res habet, ac ſi in Plano circulari vel Vecte curvo A C B penderet O ex A, & tractio fiat in B directione B P. Ergo.

Ex hoc Corollario dependet explicatio totius Capitis I V. Uſus.

§. 44. COROLLARIUM V. Si in Vecte vel angulari vel recto A B Potentia P ſuſtineat Pondus O directione perpendiculari B P; manente autem hac ipſa directione ſuſtentetur in eodem Vecte idem O, ſed altius elevatum, puta in Vectis ſitu *a* C *b*; requiretur nunc minor Potentia in *b*. Uti enim nunc decreſcit diſtantia ipſius O (cum ex majore C *m* fiat minor C *n*) ita & decreſcit Potentia. Fig. 10.

Reſtant nonnulla aliæ Vectis proprietates, quas commodius rejicimus in Caput ſequens, ſiquidem melius comprehendentur poſt explicatam Centri gravitatis naturam.

CAPUT II.

De Centro gravitatis.

§. 45. DEFINITIO I. *Centrum gravitatis* eſt in Corpore gravi illud punctum, circa quod omnes partes corporis conſiſtunt in æquilibrio.

§. 46. COROLLARIA. I. Quieſcente vel ſuſpenſo illo Centro, etiam quieſcit totum illud corpus; quia quieſcunt Corporis illius partes, utpote æquilibratæ inter ſe; excepto forte motu vertiginis impreſſo.

II. In Vecte Heterodromo horizontaliter æquilibrato Centrum gravitatis eſt in puncto illo, quod fulcro innititur.

SCHOLION. Centrum gravitatis nonnunquam eſt extra Corpus. Sic Centrum gravitatis annuli concipitur in medio ſpatii annularis.

§. 47. DEFINITIO II. *Diameter gravitatis* eſt linea recta, ducta per Centrum gravitatis. *Planum gravitatis* eſt illud, in quo exiſtit Diameter gravitatis.

§. 48. DEFINITIO III. *Diameter Figuræ* vel Magnitudinis eſt Linea vel Planum, quæ illam dividunt in partes æquales.

SCHOLION. Diameter Gravitatis non ſemper coincidit cum Diametro Magnitudinis. Nam eſto, Vectem angularem * DCB, ſua gravitate dotatum, dividi in æqualia bracchia ſolide DC, CB, hæc tamen non æquiponderabunt in iſto ſitu.

*Fig. 8.

§. 49. DEFINITIO IV. *Centrum Gravium* eſt illud, ad quod omnia gravia tendunt.

Reſpectu gravium circa ſuperficiem telluris merito habetur pro Centro gravium ipſum Terræ Centrum. Nam cum Terra ſit phyſice ſphærica, ut in Geographia docetur, & aqua circa illam ſphærice conglobetur; advertimus, ubique corpus grave libere cadens vergere per lineam, quæ ſit ad aquam horizontalem perpendicularis, ac proinde ad Centrum Terræ tendere. Linea itaque *directionis* gravium eſt linea verticalis.

Utrum autem gravia præciſe & exactiſſime ubique ad Centrum Terræ tendant, dubitatur a quibusdam. Vide *Memoires des Trevoux ad A.* 1751. p. 1098.

§. 50. DEFINITIO V. *Baſis* Corporis gravis eſt in Plano Horizontali pars illa, cui grave inſiſtit.

HYPOTHESES ET POSTULATA.

§. 51. I. Lineæ Directionis, per quas gravia deſcendunt, in diſtantia non admodum magna, ſunt ſibi parallelæ, ſcil. phyſice, nam

in rigore Geometrico cum in Centro Terræ coirent, perfecte parallelæ eſſe nequeunt.

II. Eadem Corpora æqualiter gravitant (ſaltem ad ſenſum) tam in ſuperficie Terræ, quam ſupra aut infra iſtam, ſi ab hac non multum diſtent.

Neutoniani autem contendunt, Corpora noſtra in Lunam translata, gravitare ibi minus quam apud nos.

III. Quia qui Centrum gravitatis ſuſtentat, totam Corporis molem ſuſtinet, licebit in ordine ad demonſtrationes quandoque concipere totam gravitatem Corporis in hoc Centro collectam.

SCHOLION. Intelligendum hoc de Corporibus ſolidis, quorum partes inter ſe connexæ ſunt, non de fluidis, niſi quatenus hæc ſuis incluſa vaſis continentur. Libera enim diffluunt, & incertum illud punctum reddunt.

IV. Quodvis Corpus habet unicum tantum Centrum gravitatis. Vide poſtea Prop. 11. Scholion.

V. Idem Corpus ſub quacunque figura æquale pondus retinet. Sic Cera unius Libræ ſemper libram pendet, ſive cogatur in Figuram Cubi, ſive Pyramidis, ſive Globi, ſive Cylindri &c. Eſt ab experientia certum.

AXIOMATA.

§. 52. I. In Homogeneis, quæ ſecundum longitudinem poſſunt dividi in partes ſimiles & æquales (qualia ſunt Cylindrus, Parallelepipedum, Priſma), Centrum gravitatis eſt idem cum Centro Magnitudinis.

SCHOLION. Hinc ſi baculus fiat parallelepipedus, per cujus centrum medium trajiciatur Axis transverſus, hypomochlio in-

cumbens; aptum habetur organon ad demonſtrandam Propoſitionem 3, præſertim ſi per ipſa bracchia poſſint moveri, in iiſque pro lubitu figi duæ anſæ axiculis lateralibus inſtructæ, e quibus ſuſpendantur pondera. Jam vero baculi hujus bracchia æqualia æquilibrium inter ſeſe ſervant; ac proinde uſurpari poſſunt, velut ſi gravitate carerent. Quodſi contingat per anſarum inæquales diſtantias æquilibrium turbari, per contrapondium facile reſtituetur. Aliæ cautelæ, præſertim quod Axium omnium acumina debeant in eadem prope linea recta exiſtere, patebunt ex Prop. 15.

II. In Corporibus homogeneis Pondera ſunt proportionata Maſſis vel voluminibus. *Ut ſi Corpus ſub volumine Cubico ponderet libras* 100; *duo ejuſmodi vel tria corpora ponderabunt libras* 200 *vel* 300.

III. Cauſa neceſſaria agit tantum, quantum poteſt.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 13. §. 53. *Si Linea directionis* (dc) *qua grave* NM *verſus Centrum Terræ tendit, cadat intra baſin fulcientem* A; *non labetur Corpus.* II. *Si vero linea hæc cadat extra baſin; labetur, & quidem verſus eam partem, verſus quam cadit dicta linea.*

DEMONSTRATUR. *In primo Caſu* ſuſtentatur Centrum gravitatis, adeoque & totum
§. 46. Corpus. *In ſecundo Caſu* Centrum hoc non fulcitur, præponderatque pars non fulta alteri; igitur hanc ſecum in ruinam trahit ex ea parte, ubi obſtaculum non reperit, i. e. quo dicta linea cadit. Ergo. *Q. e. d.*

§. 54. COROLLARIUM. Grave etiam tunc quieſcet, ſi ſuſpendatur ex puncto, a Centro gravitatis diverſo, ſi modo illud ſit in linea directionis gravis. Quia hoc modo ſuſtentatur adhuc ipſum gravitatis Centrum.

SCHOLION I.

§. 55. Ex hac Propoſitione explico nonnulla ad Vectem adhuc pertinentia.

I. Quando Pondus *q* *, ſuſtentatum a Vecte, habet Centrum gravitatis *c* ſupra vectem horizontaliter ſitum; quo magis pondus ita poſitum a Vecte elevatur, eo minore indiget Potentia ſuſtentante *p*, eoquod tam verticalis Diameter gravitatis, quam diſtantia propius admovetur ad fulcrum *g*. At ſi Pondus *p* in ſimili ſitu deprimatur infra Horizontem, indigebit Potentiâ *q* tanto majore, quanto magis infra hunc deprimitur: prout liquet ex Propoſ. præſente & Propoſ. 7. Coroll. 5. Rurſus quando Pondus *r* habet Centrum gravitatis infra Vectem horizontaliter ſitum; quo magis ab hoc ſitu Pondus elevatur, eo majore indiget Potentiâ *s* ſuſtinente: ſi vero infra Horizontem deprimitur, minore.

* Fig. 10.

II. Quando Corpus grave, v.g. Parallelepipedum * G Horizonti oblique inſiſtit altero extremo A, altero B ſuſtentatur a Potentia P in Vecte Heterodromo PB; erues quantitatem Potentiæ B, ſi demittas in Horizontem duas Perpendiculares GO*r* & B*n*, primam ex Centro gravitatis, alteram ex B. Nunc enimvero latus AB æquivalet Vecti obliquo Homodromo AOB, cujus puncto O incumbat totum Pondus Parallelepipedi: ſed in tali Vecte diſtantia Ponderis eſt A*r*, & diſtantia Potentiæ eſt A*n* *. Ergo eſt ut A*n* ad A*r*, ita G ad B. Porro inventurus Potentiam P, parem ipſi B, operare juxta Prop. 3. Coroll. 4.

* Fig. 7.

* §. 40.

SCHOLION II.

§. 56. Ex hac ipſa Propoſitione pronum eſt intelligere. 1.) Cur Turres quædam ſatis altæ, Bononienſis & Piſana, firmæ perſtent, tametſi inclinatæ videantur ruinam minari; nempe in his Centrum gravitatis cadit adhuc intra baſin. 2.) Quomodo poſſit ex parvo baculo menſæ horizontaliter impoſito ſuſpendi amphora aquâ ſemiplena: quod fiet, ſi alius baculus ex loco ſuſpenſionis ita figatur in amphoræ fundum, ut hæc potiore ſui parte inclinetur infra menſam, atque adeo linea directionis & gravitatis adhuc per ipſam menſam tranſeat. 3) Quomodo culter ad angulum acutum infixus bacillo, hunc retineat ex menſæ crepidine pendulum, ſecus lapſurum. 4) Quare gibboſi aſcendentes acclivia, & onus tergo ba-

ſulantes inclinentur antrorſum. 5) Quare nequeas e ſella ſurgere, quamdiu eidem inſidens ſervas Corporis truncum verticaliter erectum. 6) Quare, dum ſtans ad parietem talos illi applicas, nequeas ſine lapſu ſolum manu contingere. 7) Omne animal ſive bipes ſive quadrupes in inceſſu ita pedem unum aut duos attollit, ut linea directionis tranſeat adhuc per Centrum gravitatis corporeæ molis, alio vel aliis pedibus fultæ. Inde eſt, quod pedem ſiniſtrum promoventes, corpus tantillum in partem dextram flectamus, & dextrum attollentes in ſiniſtram detorqueamus. 8.) Labimur, dum Centrum gravitatis cadit extra plantæ vel plantarum baſin. Hinc ut lapſum, dum antrorſum incurvamur, præpediamus; pedem alterum aut clunes in poſteriora removemus: nonnunquam lapſui proximos reſtituit bracchium in oppoſitam partem exporrectum. Quarum rerum cognitio pictoribus æque ac ſculptoribus pernecessaria, ſi naturam æmulari absque vitio velint. 9.) Hinc natura hominem bipedem latioribus plantis inſtruxit præ quadrupedibus. 10) Provida etiam natura partes hominis geminatas, puta aures, bracchia, pedes, utrimque in æquali a linea directionis & gravitatis diſtantia, ſimplices vero, v g. naſum, mentum &c. in medio diſpoſuit, ut adeo planum per hominis Corpus ductum hunc divideret in partes æquiponderantes. 11.) Si in ave volante concipias lineam per expanſas alas ductam; erit in hujus medio Centrum gravitatis. Alæ ipſæ aërem verberantes habent ſe inſtar axis per Vectem trajecti. Ac ne inter volandum pars anterior poſteriori præponderet, Grues & Ciconiæ longiora crura extendunt. Sed dum gravius pabulum roſtro ferunt, eædem collum retrahunt, ut æquilibrium inducant. 13) Aves aliæ, quarum pedes breviores ſunt, & quarum poſteriora inſignem nonnunquam pinguedinem atque unà gravitatem acquirunt, ita ſunt comparatæ, ut collo aut extenſo aut retracto obtineant æquilibrium cum partibus poſterioribus, prout illæ nunc aut leves aut graves ſunt. 14) Anſer hortei acclive limen ſubiens, collum protendit; talis enim inceſſus juvatur majore partis anterioris momento. 15.) Funambulos juvat contus longior, nunc dextrorſum nunc lævorſum porrectus, ad Centrum gravitatis ſupra funem retinendum. 16.) Ita & contum ipſum erectum manûs palmâ geſtamus, dum hæc ita dirigitur, ut linea directionis eidem inſiſtat. 17.) Acum autem nulla arte tenebimus ſuper cuſpide erectam, tum quod linea directionis difficillime ſuper baſin anguſtiſſimam conſtituatur, tum quod hæc vel minimo aëris motu aliave vi exorbitet. 18.) Globus ſuper Planum declive deſcendit, quod Centrum gravitatis extra baſin cadat. 19.) Alia Corpora, v g. Cubus, ſuper plana declivia nunc deſcendunt rependo, nunc rotando; utrum ex his & quandonam fiat determinavit Kraffiius in Comment. Acad. Petropol. 1740, juxta quem frictio tamen ſæpe facit, ut quæ in Plano polito deſcenderent rependo, per idem panno obductum devolvantur rotando. 20.) Corpus compoſitum ex duobus Conis ſecundum baſes conjunctis videtur

aſcendere per duo plana verticalia, aliquantum acclivia, ſi hæc inſtar anguli coëant, & coni illi planis his incumbant: revera autem corpus tale deſcendet, eoquod Centrum gravitatis ſit elevatius ipſis plani partibus Corpori huic proximis, ac præterea linea directionis cadat extra puncta fulcientia. Ita & Cylindrus inſtar tympani formatus aſcendet per planum inclinatum, ſi Cylindri lateri, in loco ſuperficiei cylindricæ proximo, infundas plumbum; quod dum novum gravitatis centrum format vicinius nunc ſuperficiei Cylindricæ, qua acclivitatem reſpicit, Cylindrum ad gyrum atque adeo apparentem aſcenſum concitat. 21.) Ex eodem fundamento conſtruuntur horologia in modum tympani formata, circa gracilem axem ex filis ſuſpenſum volubilia, quorum cavum diviſum eſt in diverſa loculamenta, ex quorum uno in aliud per tenue foramen aqua deſcendit, atque ita mutato pedetentim gravitatis centro facit, ut tympanum tarda circumvolutione deſcendat. 22.) Currus fœno alte onuſtus everti facile poteſt, ubi non onuſtus haud caderet: nam dum ad notabilem altitudinem oneratur, Centrum gravitatis altius jam figitur, quam in non onuſto: quo fit, ut Centrum hoc citius ultra baſin porrigatur. Unde & perculoſiores currus altarum, quam humilium rotarum. 23.) Propterea & Architectonica poſtulat baſes eo majores, quo altius turris aut murus erigitur.

PROPOSITIO IX.

§. 57. *Si Corpus grave* AB *ſuſpendatur duobus filis obliquis* AM, BM, *in unum punctum* M *coëuntibus; & quieſcat: erit Centrum gravitatis in ipſa linea verticali* MN, *ejusque aliquo puncto* C. Fig. 14.

DEMONSTR. Si enim non ſit in C, ſed v.g. in *x*; ducatur Radio M*x* arcus *x*N, deinde horizontalis *xp*, quæ erit perpendicularis ſimul & ſinus anguli *x*M*p*: adeoque punctum *p* altius eſt puncto N. Sed ſi hoc, tunc gravitas in *x* collecta aget tantum, quantum poteſt ſcilicet, non impedita, deſcendet verſus N. Ergo jam Corpus AB non quieſceret (*ex demonſtratis*) & quieſceret (*ex hypoth.*) Quod eſt abſurdum. Ergo.

§. 58. COROLLARIUM I. Ex eadem ratione ſi Corpus AB ſuſpendatur ex unico filo MN; erit adhuc in linea verticali MN Centrum gravitatis. II. Si ex M demittatur filum ponduſculo gravatum; manifeſtabit hoc lineam verticalem & directionis. Ponduſculum autem ſi inferius in cuſpidem deſinat, Centro gravitatis imminebit, iſtudque ſua cuſpide indicabit.

Fig. 15. §. 59. COROLLARIUM II. *Practicum. Utrum Planum aliquod horizontaliter ſitum ſit, explorare.* Conſtrue tibi ex ligno vel metallo Triangulum Iſoſceles ABM, in cujus baſin biſectam cadat perpendiculum MN. Pendeat autem ex M filum ponduſculo tenſum. 2do, impone nunc dato Plano baſin Trianguli verticaliter erecti; & ſi filum cum Perpendiculari MN congruat, erit Plani linea *m* AB *n* *§. 12. horizontalis *, eo quod perpendicularis ſit ad verticalem MN. 3^{tio} impone Trianguli baſin lineæ *rs*, in Plano ita exiſtenti, ut priorem *mn* ſecet; & ſi rurſus filum verticali MN reſpondeat; erit etiam ipſa *rs* horizontalis: proinde & totum planum erit tale, cum nulla Plani linea ſit alterâ aut depreſſior aut ſublimior. Contra non erit Planum hoc Horizontale, quando vel in utraque vel alterutra Baſeos trianguli impoſitione filum non congruerit cum perpendiculari MN.

PROPOSITIO X.

§. 60. *Centrum gravitatis in Corporibus mechanice ſeu experimentaliter determinare.*

Duos modos hic refero. Primum habes in Prop. 9 *, ubi grave, ex puncto ſuſpenſionis communi M demiſſum, cuſpide ſua indicabit ſi non ipſum gravitatis Centrum, certe ejus Diametrum, intra quam Centrum hoc reconditur. Sic etiam ſi filum unicum M N & Planum aliquod A B M (*utamur eadem figura 14, in qua rectas* M A, M B, *quas ante ut fila conſiderabamus, nunc pro lateribus Plani* A B M *habeamus*) ex communi puncto M verticaliter ſuſpendas; filum M N, radens Planum, prodet lineam directionis, intra Planum exiſtentem. Quodſi idem Planum denuo ſuſpendas, ſed ex alio puncto v.g. B, ita ut filum M N novam indicet lineam, quæ priorem ſecet; indicabit punctum ſectionis Centrum gravitatis. * Fig. 14.

II. Super Priſmatis horizontalis aciem A B diſpone ita Corpus, ut quieſcat, ac tunc nota lineam aciei A B congruentem. 2do, idem Corpus alio nunc ſitu diſpone ſuper eandem aciem, ut denuo quieſcat; notaque alteram lineam C D, aciei congruentem. Erit punctum interſectionis O, punctum exiſtens in Diametro gravitatis & lineâ directionis. Nam ambæ lineæ C D, A B, poſſunt concipi exiſtere in gemino verticali *gravitatis Plano*; ſed ubi duo ejusmodi plana ſe ſecant, efficiunt verticalem Diametrum gravitatis (*ſi enim Diameter gravitatis exiſteret extra hanc communem ſectionem, grave non fuiſſet ſuſtentatum eo modo, quo id factum ſupponebatur*) ſive lineam direc- Fig. 16.

tionis. Ergo in O exiſtit punctum lineæ directionis, ex quo ſuſtentatum corpus manet in æquilibrio.

§. 61. SCHOLION I. Tametſi vix unquam liceat Centrum gravitatis ipſum attingere atque ex eo Corpus ſuſpendere; ſufficit tamen plerumque Lineam directionis gravis aut unum ejus punctum definiviſſe. 2do, Si in prioris Corporis plano oppoſito pari modo inveſtiges punctum Directionis gravis, conſtabit inde ſitus verticalis unius Diametri gravitatis.

SCHOLION II, Longioris difficiliorisque operæ foret oſtendere, quomodo inveniendum Centrum gravitatis diverſarum figurarum & Corporum, v.g. Trianguli, Trapezii, Semicirculi, Hemiſphærii, Parabolæ, Ellipſis &c. ad quod Geometria etiam ſublimiore opus eſſet. Satis eſt hic memoraſſe, Centrum gravitatis cujusvis Parallelogrammi eſſe in biſectione Diagonalis; Polygoni regularis, Circuli, Ellypſeos, ovatæ Figuræ eſſe in Centro harum Figurarum. 2do Centrum gravitatis Trianguli haberi in diſtantia $\frac{2}{3}$ lineæ, quæ a vertice ad medium baſeos ducitur. 3tio, In Semicirculo ſi fiat: ut arcus 60 Grad. ad duas tertias Radii, ita iſtæ duæ tertiæ ad tertium, haberi diſtantiam Centri gravitatis. Vel, Radius ſe habet ad diſtantiam Centri gravitatis fere ut 7 ad 3, vel propius ut 1000 ad 4147. 4to, In Pyramide & Cono Centrum gravitatis diſtat a vertice tres quartas Axis. 5to, Centrum gravitatis Cylindri eſt in medio Axis.

PROPOSITIO XI.

Fig. 17. §. 62. *Datis pluribus in Vecte Ponderibus* (v.g. A, B, C, D, E) *reperire horum Centrum commune, i. e. tale, ex quo ſi Vectis ſuſpendatur, pondera illa ſervent inter ſe æquilibrium.*

Quære *primo* inter A & B Centrum gravitatis *m* (*per Prop.* 3. *Cor.* 10. *ſcil. ſi fiat: ut* A *ad* B, *ita diſtantia* Bm *ad* mA) Pariter quæres inter D & E Centrum commune *n*. Deinde inter C & *n* (ſupponendo, ex *n* ſuſpenſa eſſe ambo Pondera D & E) quære centrum commune *r*. Demum inter *m* & *r* (ſupponendo, ex *m* pendere A + B, & ex *r* pendere C + D + E)

quære Centrum gravitatis *s*; quod neceſſario erit Ponderum omnium Centrum commune.

SCHOLION. Ope hujus Propoſitionis poteſt oſtendi, dari in unoquoque Corpore unicum gravitatis Centrum; ſcil. ſi omnia Corporis puncta gravia reducantur ad unum Centrum commune.

Hactenus Vectem conſideravimus gravitatis expertem; nunc eundem contemplabimur ut donatum gravitate ſua.

PROPOSITIO XII.

§. 63. *Si Vectis* AB, *gravitate ſua pollens, conſiſtat ſuper fulcrum* C *in æquilibrio horizontali; ſuſpendanturque ex eo Pondera* P *&* O *in Ratione reciproca diſtantiarum* BC, CA: *manebit æquilibrium.* Fig. 18.

DEMONSTR. Cogita, ex Centro gravitatis Bracchii AC pendere pondus *g*, æquale ipſi bracchio AC, & aliud G ex Centro gravitatis bracchii CB, huic ipſi æquale; poteritque jam Vectis AB conſiderari velut gravitatis expers. Itaque ob æquilibrium, quod hic fieri ſupponitur, æqualia ſunt momenta ipſorum *g* & *G*: ſed ſunt etiam æqualia momenta ipſorum O & P *. Ergo cum ſumma duorum momentorum ad dextram ſit æqualis ſummæ momentorum ad ſiniſtram; ſervabitur æquilibrium. *Q. e. d.* * *Prop.* 3.

PROPOSITIO XIII.

§. 64. *Si Vectis Cylindricus vel Priſmaticus, homogeneæ Maſſæ* (v.g. Vectis AB) *ex inæqualibus bracchiis* (CA, CB) *imponatur fulcro* C; *atque in utroque bracchio concipiatur punctum medium* m *&* G: *invenietur momentum vigens in* m, Fig. 19.

par æquilibrando Vecti; ſi pondus partis minoris CA *multiplicetur per Quadratum diſtantiæ majoris* CG, *idque Productum ex* m *pendere cogitetur*.

DEMONSTRATUR. Sit Vectis AB 3. librarum, & BC duplum ipſius CA. Igitur perinde eſt, ac ſi in puncto medio *m*, ceu Centro-gravitatis, penderet libra una, & in G, 2 libræ. Atqui nunc ad æquilibrium requiritur, ut ſit Pondus *g* ad G, uti diſtantia GC ad C*g*; GC autem eſt dupla ipſius C*g*: ergo & *g* debet eſſe duplum ipſius G, æquale nempe ipſi 2 × 2, i.e. uni libræ multiplicatæ per Quadratum diſtantiæ CG. *Q.e.d.* Quare cum gravitas bracchii CA, vigens in *m*, ſit jam unius libræ, debebunt ex *m* adhuc ſuſpendi tres aliæ libræ, quo totus Vectis AB in æquilibrio horizontali conſiſtat.

* Fig. 20. Similiter ſi bracchium * DC ſit triplum ipſius CA: erit bracchii DC Pondus (quod vocabimus π) triplum alterius CA, concipieturque pendere in *r*, i.e. in diſtantia *r*C tripla ipſius C*g*. Igitur pro ſtatu æquilibrii momentum ipſius *g* eſt $3 \times \pi$, i.e. $3 \times 3 = 9 =$ Quadrato ex 3. Et ſic deinceps; ita ut proprietas hujus Propoſitionis non modo numeris integris ſed & fractis competat, prout examinanti patebit.

Fig. 20. §. 65. SCHOLION I. Idem etiam ſequente evinces ratiocinio. Si BC ſit duplum ipſius CA, diviſum in partes æquales BG, GC; ſervabunt *primo* æquilibrium inter ſe duæ partes æquales CG, AC. 2*do*, GB æquale ipſi CA (cujus gravitas colligitur in puncto medio *r*)

diſtat diſtantiâ triplâ ipſius Cg; adeoque pro GB æquilibrando requiruntur ad dextram adhuc 3 CA, atque adeo univerſim (1 CA † 3 CA) = 4 CA. Porro ſi CD ſit triplum ipſius CA, diviſum in 3 æquales partes DB, BG, GC; pro partibus CG & GB æquilibrandis requiruntur (*ex modo dictis*) ad dextram 4 CA: 2*do*, pro BD, quod diſtat diſtantia quintupla ipſius Cg, requiruntur 5 AC, adeoque univerſim (4 AC † 5 AC) = 9 AC. Hinc ſi Parallelepipedi DA pars DC ſit ad alteram CA, ut 3 : 1; erit æquilibrium, ſi parti AC imponas adhuc octo alia parallelepipeda, ipſi AC æqualia.

SCHOLION II. Ex his porro pronum fit, quomodo datis gravitate Vectis, homogenei Parallelepipedi AB (v.g. 6. Librarum) & Potentia P (2 libr.) datisque diſtantiis CA, CB (quas ponemus eſſe, ut 1 : 2) inveniendum ſit pro æquilibrio Pondus O. Nam *primo*, præſcindendo a Vectis gravitate deberet eſſe 1 : 2 : : P : O : : 2 : 4, adeoque O = 4 libr. *Secundo*, propter Vectem ipſum, in quo quidem æquiponderant partes æquales GC, CA, reliqua autem pars bilibris BG diſtat reſpectu ipſius O, ut 3 : 2, deberent in O adhuc addi 3 libræ. Igitur pro æquilibrio habendo debet O eſſe librarum (4 † 3) = 7. Fig. 20.

CAPUT III.

De Machinis ſimplicibus, Libra, Statera, Axe in Peritrochio, Trochlea, Plano inclinato, Cochlea, Cuneo.

Inter Machinas ſimplices primum locum obtinet Vectis: quem quia in præcedentibus pro ratione inſtituti noſtri abunde verſavimus, nunc cæteras expendemus.

ARTICULUS I.

DE LIBRA.

§. 66. DEFINITIO. *Libra* ſeu *Bilanx* eſt Machina, conſtans jugo ſeu ſcapo AB, com- Tab. II. Fig. 21.

poſito ex æqualibus & æquilibrium inter ſe ſervantibus bracchiis A C, C B; Axe C, qui per jugi medium perpendiculariter trajicitur & ſuſtentatur trutinâ C D; Lingulâ inſuper ſeu Examine C r, quæ jugi medio perpendiculariter inſiſtit intra trutinam. Ex bracchiorum extremis ſuſpenduntur lances L, & *l*, quæ & ipſæ unà cum filis ſuis & fibulis æquiponderant. Lingula verticaliter erecta indicat, jugum eſſe in ſitu horizontali.

PROPOSITIO XIV.

§. 67. *Pondera æqualia in Libra horizontaliter ſita ſervant æquilibrium.* II. *Et dum ſervant æquilibrium, ſunt æqualia.*

DEMONSTRATUR I. Pars uti Propoſitio I.

DEMONSTRATUR II. Pars ex Prop. 3. Cor. 5. vel per abſurdum ex ipſa parte I. derivandum.

PROPOSITIO XV.

Demonſtrantur præcipuæ Bilancis proprietates.

Fig. 22. §. 68. I. *Si in Libra* A B (cujus jugum Mathematice hic, ſcil. inſtar lineæ conſiderabimus) *Centrum motus* C *ſit in ipſa linea horizontali* A B *ex qua ſuſpenſa ſint Pondera æqualia; quieſcet Libra, in quocunque ſitu* (v.g. *a* C *b*) *poſita, nec ſe reſtituet ad ſitum horizontalem.* DEMONSTR. Ductis in horizontalem A B perpendicularibus *bm*, *an*, æqualia ſunt Triangula *Cna*, *Cmb*; igitur & diſtantiæ *Cn*, *Cm*, æqua-

æquales. Cumque Pondera ipſa æquantur, Tab.II.
conſiſtit æquilibrium, *per Propos.* 1.

§. 69. II. *Si in Libra* AB *Centrum motûs* Fig. 23
non ſit in linea jugi Mathematici, ſed ſupra iſtam, ſcil. in C; *fueritque Libra hæc ex ſitu horizontali inclinata ad ſitum* aCb: *Pondera æqualia* A *&* B *ſe reſtituent ad æquilibrium horizontale.* DEMONSTR. Diſtantiæ in Libra inclinata hic ſunt *m*C, C*n*; hæ autem cum ſint inæquales, pondera vero æqualia; præponderabit ipſum *b**, *§. 26.
adeoque deſcendet; & propter conceptum impetum attollet ipſum *a*: hoc autem eodem modo deſcendet & attollet ipſum *b*; eaque alternatio ſemper continuabitur, ſi nullus fuerit in puncto C affrictus; ſin vero per attritum motus ſenſim imminuatur, continuabitur eousque ſolum, dum demum bilanx in ſitu horizontali quieſcat, *per Prop.* 1.

§. 70. III. *Rurſum ſi Centrum motûs non* Fig. 23
ſit in linea jugi Mathematici; ſed ſupra eam in C; *fueritque Pondus* a *paulo majus altero* b: *deſcendet ipſum* a *eousque in ſitum* ab, *dum demum ſit diſtantia* mC *ad diſtantiam* Cn, *uti* b *ad* a. DEMONSTRATIO liquet ex Prop. 3. & 7.

§. 71. IV. *Si Libra, cujus Centrum motûs* Fig. 24.
C *eſt infra lineam jugi Mathematici* AB, *dimoveatur ex ſitu horizontali in alium* anb; *non redibit Libra ad horizontalem ſitum, ſed vertetur & gyrabitur circa* C, *donec acquirat ſitum illi priori contrarium, ſcilicet* b *fiat ſiniſtrum, & a dextrum.* DEMONSTR. Centrum gravitatis *n*, quod in ſitu horizontali exiſtebat intra ver-

Tab. II. ticalem CV, nunc exiſtit extra iſtam. Ergo cadet machina, nec quieſcet, donec punctum *u* reſpondeat in linea Verticali puncto ſuſpenſionis C. Quod dum fit, acquiritur ſitus horizontalis quidem, ſed priori contrarius. *Q. e. d.*

SCHOLION

pro fabrica Bilancis.

§. 72. I. Curandum, ut Axis exiguum habeat attritum. Idcirco ille vel Cylindricus ſit, vel quod melius, in aliqualem aciem deſinat, quâ trutinæ fulcrum annulare tangat. II. Bracchia longiora præſtant brevioribus, eoquod deſcribant arcum magis ſenſibilem, magisque prodant ponderum inæqualitatem. Præterea ſi quæ ſit in ipſis bracchiis inæqualitas, hæc minus in longioribus quam brevioribus nocebit. Modum tamen hîc tenere oportebit, ne bracchia juſto longiora reddantur inflexioni obnoxia. III. Similiter Lingula altior, ceu index magis ſenſibilis, præferenda humiliori. IV. Acies axis, & duo ſuſpenſionis puncta in jugo ſint fere in una linea recta. Et Axis quidem acies ceu Centrum motus, figatur tantillum ſupra iſtam lineam. Si enim in illa ipſa exiſtat, facile fiet, ut Libra hæc obtineat proprietatem Bilancis deſcriptæ in §. 68, nec apte dignoſci queat, an aut quæ pars alteri præponderet. Si infra illam lineam Centrum figatur, fiet Libra vel nimium mobilis, vel plane inutilis, utpote everſioni obnoxia. At ſi paulum ſupra lineam hanc locetur, redibit Libra ad ſitum horizontalem *, ſi ex hóc emota fuerit. V. Cavendum vero, ne Centrum hoc juſto altius ſupra dictam lineam ponatur: alias efficietur Libra valde pigra. VI. Curandum, ut Centrum gravitatis totius jugi ſit mox infra aciem Axis. VII. Jugum ſit tenue & leve, ponderibus tamen ferendis proportionatum. Unde nec Bilanx ultra vires oneranda. VIII. Ne lingula extra trutinam emota & inclinata bracchiorum uni momentum aliquod conferre poſſit, proderit ei in ſcapi parte inferiore æquale contrapondium opponere.

* §. 69.

PROPOSITIO XVI.

§. 73. *Examinare, utrum Libra fallax & doloſa ſit.* Vocatur autem doloſa illa, quæ bracchia habet inæqualia, & nihilominus æquilibrium præ ſe fert. Tab. II. Fig. 21.

Permuta Lancium, L & *l*, pondera P & Q: & ſi Libra proba fuerit, i. e. ſi & Pondera & bracchia æqualia fuerint; manebit æquilibrium *per Prop.* 14. At ſi doloſa fuerit, ut ſi bracchium CB ſit longius altero AC; deſtruetur æquilibrium, & præponderabit Pondus Q, ex *l* translatum in L. Nam ante permutationem erat AC : CB : : P : Q *, adeoque Q majus quam P. Poſt permutationem eſt major Ratio ipſius Q ad P, quam AC ad CB. Ergo Q præponderabit *.

* *Pr.* 3. *Cor.* 6.

* *Pr.* 3. *Cor.* 4.

§. 74. SCHOLION. Nihilominus in Libra etiam doloſa poteſt inveniri verum Mercis pondus, idque in hunc modum. Sit *primo* æquilibrium; diſtantia major ſit CB; ſit Pondus P in lance L, & in lance *l* merx ponderanda, quæ dum ignota eſt, vocetur *x*. Erit ergo ut AC : CB : : P : *x*. *Secundo* transferatur Merx ex *l* in L, & ponatur in *l* novum, ſed notum Pondus, quod vocabimus *p*, æquilibrans cum *x*; erit ut AC : CB : : *x* : *p*. Atque ob hanc & præcedentem Proportionem erit P : *x* : : *x* : *p*; proinde $Pp = xx$. Igitur Radix quadrata ex Pp prodit ipſum *x*.

ARTICULUS II.

De Statera Romana.

§. 75. DEFINITIO. *Statera Romana* eſt virga rigida bracchiorum inæqualium, quam trajicit perpendiculariter Axis, acumine ſuo, uti in Libra, trutinæ foraminibus inſiſtens. Fig. 25.

Tab. II. Lingulam inſuper geſtat veluti Libra. Bracchia antequam onerentur, ad æquilibrium ſint reducta; quod fit vel per appenſam in bracchio breviore Lancem, vel per uncum aliudve pondus. Bracchium longius CB, incipiendo à Centro motûs C, dividitur in plures partes æquales longitudini AC, quæ eſt inter punctum ſuſpenſionis A & Centrum C; poteſtque fieri harum partium ſubdiviſio. Adeſt & Bolis P, noti alicujus ponderis, v.g. unius libræ: Bolis hæc debet poſſe per ſcapum vagari & in eo diverſis diviſionum punctis inſiſtere.

PROPOSITIO XVII.

§. 76. *Si in* A *appendatur aliquod Pondus* O; *& Bolis P in ſcapo inſiſtat alicui diviſionis puncto* (v.g. Sexageſimo) *æquilibrium efficiens; notum fiet ipſum O: nempe O toties continebit ipſum P, quoties diſtantia* CP *continet ipſam* AC.

DEMONSTRATIO. Statera hæc æquivalet Vecti Heterodromo. Ergo pro æquilibrio eſt PC : CA :: O : P. Proinde ſi PC ſit ſexagecupla ipſius CA, etiam O ipſius P ſexagecuplum erit. *Q. e. d.*

§. 77. SCHOLION I. Diviſioni Scapi ſupra indicatæ præfertur diviſio empirica, quæ fit tentando, ſcil. appendendo in A Libram unam, & tunc Bolidem cujuscunque ponderis v.g. unius Libræ ex C verſus B movendo, dum æquilibrium obtineat; quo facto notetur punctum illud, cui illa impendet. Idem eſto judicium de punctis aliis inveniendis. *Vel*, puncta decimæ tentando inveni, & ſpatia intercepta in alia decem ſubdivide.

SCHOLION II. Statera Romana habet illud commodi præ Bilance, quod cum ſolum onus O & Bolis P in eam graviteat, Axis ejus minori vi adigatur in trutinam, quà illam tangit, pre-

inde & motus ejus aliquanto liberior ſit, quam in bilance. 2do, quod unico pondere explorari multa alia graviora poſſint. 3tio, quod graviora onera, quam bilanx, ſuſtentare queat. Verum cum nequeant in illa obſervari Ponderum minutiæ; cum facile doloſa poſſit effici, nec pronum ſit, fraudem ejus illico retegere, bilanci poſthabenda eſt. Cæterum poſſunt etiam ſtateræ parari, quarum minus bracchium non ſit in æquilibrio cum longiore, antequam onerentur: quæ quomodo tractari debeant, ſi nondum ſatis per ſe pateat, diſci poterit ex *Leupoldi Theatro Statico*. Tab. II.

ARTICULUS III.
De Axe in Peritrochio.

§. 78. Definitio. *Axis in Peritrochio* eſt Machina, quæ *primo* conſtat Cylindro A B, cui funis circumvolvitur ſuſtinens Pondus O; 2do. duobus clavis teretibus, qui Cylindri baſibus ita infixi ſunt, ut ejus Axem conſtituant. Hi fulcris incumbunt, ſuper quæ verſari queant; 3tio. Scytalis vel Radiis *mn*, *pq*, per Cylindrum trajectis, vel Rotâ R, cujus peripheriæ infixi ſint Radii. Supponimus, Scytalas iſtas ſeu Radios rectâ tendere verſus Centrum Rotæ aut Cylindri. Fig. 26.

PROPOSITIO XVIII.

§. 79. *Si e Cylindro* B A *pendeat Pondus* O; *& Potentia* D *vel* P *directione ad ſcytalam perpendiculari deorſum trahat: erit æquilibrium, ſi fuerit Radius* C D *ad Cylindri ſemidiametrum* BC *reciproce, uti* O *ad* D *vel* P. Fig. 27.

Demonstr. Talis machina refert Vectem Heterodromum DCB, mobilem circa Centrum fixum C. Ergo DC:CB::O:P. *Q. e. d.*

Scholion. Quo longior eſt Scytala, aut quo gracilior Cylindrus, eo minor requiritur Potentia ad ſuſtentandum onus.

Tab. II. 2. Hinc dum Pondus quodpiam hac Machina attollitur, curandum, ut ne funis ſupra ſeipſum volvatur, ac ne ſpiræ ſpiris imponantur; creſcente enim Cylindri Diametro decreſcunt vires Potentiæ. 3. Si Potentia P habeat majorem Rationem ad O, quam A C ad C B; vincetur nunc & attolletur Pondus O; quo pacto Machina hæc inſtar Vectis perpetui erit: dum enim nova Scytala apprehenditur, perinde eſt, acſi Vectis de novo applicaretur. 4. Ad Axem in peritrochio revocantur rotæ Molarum, in quarum prominentes palmulas vel alas dum aqua aut ventus impetu incurrit, iſtas circumagit. Huc ſpectant & rotæ illæ inſtar tympani cavæ, quæ vel ab homine vel ab animali pedibus antrorſum porrectis calcantur & circumvolutantur: Rotæ item dentatæ de quibus poſtea.

ARTICULUS IV.
De Trochleis.

§. 80. DEFINITIO. *Trochlea* eſt machina conſtans uno vel pluribus orbiculis circa Axem rotabilibus, in quorum peripheria inciſus eſt canaliculus circularis, qui funem excipit. Trochlea unius rotulæ vocatur *Monoſpaſtos*; duarum rotularum, *Diſpaſtos*; trium, *Triſpaſtos* &c. & ſic de aliis *Polyſpaſtis*.

Trochlea dupliciter adhibetur: vel enim figitur immobiliter, ut in Fig. 28; vel eſt mobilis, ut in Fig. 29.

PROPOSITIO XIX.

§. 81. *Si Pondus* O *pendeat ex Trochlea fixa* (Fig. 28.) & *Potentia* P *trahat directione parallela ad filum AO; requiritur pro æquilibrio* O = P. II. *Ut autem in Trochlea mobili* (Fig. 29.) *ſit æquilibrium inter Potentiam P & Pondus O, requiritur* P : O :: 1 : 2.

DEMONSTRATUR I. *Pars*. Trochlea hæc ſe habet inſtar Libræ, habens ultro citroque Centrum C æqualia bracchia A C, C B. Ergo requiritur O = P.

DEMONSTRATUR II. *Pars*. Trochlea haec ſe habet inſtar Vectis Homodromi, cujus fulcrum eſt in A, Potentia applicata in B, Pondus in medio C. Ergo P : O :: AC : AB :: 1 : 2. *Q. e. d.* Tab. II.

§. 82. SCHOLION I. Quanquam Trochlea fixa ex demonſtratis non juvet Potentiam reſpectu Ponderis, id tamen confert, ut in rotula verſatili funis ſit minus refractarius trahenti, quam ſi is foret circa obſtaculum fixum trahendus.

SCHOLION II. Si in Trochlea fixa Pondus ſit P, Potentia autem *p* trahat directione *mp*, ad BP non parallela; adhuc requiritur P ⊨ *p* pro aequilibrio. Nam quia *pm* eſt Tangens, adeoque perpendicularis ad C*m*, erit * BC : C*m* :: *p* : P; ſed eſt BC ⊨ C*m*, ergo & *p* ⊨ P. Hinc ſi in capiendis experimentis exhibendae ſint Potentiae trahentes directione obliqua, poſſunt harum vices obire Pondera per applicatam trochleam oblique trahentia. Fig. 28. * Prop. 5.

SCHOLION III. Praeferenda eſt Trochlea, quae cum ſuo Axe mobilis eſt intra Capſam, illi, quae circa fixum Axem rotatur; poſtrema enim ob crebriores inaequalesque ſubſultus atque attritum majorem majus ſuſtinet impedimentum, quam prima, motu magis aequabili gyranda.

PROPOSITIO XX.

§. 83. *In Polyſpaſto (Figurae 31.) eſt aequilibrium; ſi ſit P ad O, ut 1 ad numerum funiculorum, inferioribus trochleis circumdatorum;* VEL, *ut 1 ad duplum numeri trochlearum inferiorum.*

DEMONSTRATIO. Superiores trochleae nihil juvant Potentiam P, ſed funium duntaxat lubricitatem *. Dum autem Potentia P tenet extremum funis, onus O deſcendit gravitate ſua eousque, dum funes uniuscujusque trochleae ſint aequaliter tenſi: adeoque Pondus O diſtribuitur per funiculos inferiores, aequali vi a ſingulis geſtandum. Ergo P in caſu Figurae dato eſt quarta pars virium, ipſum O ſuſtentantium; unde hic P : O :: 1 : 4. * §. 82.

Tab. II. §. 84. ALIA DEMONSTRATIO. Velocitates hîc ſunt reciproce ut Potentiæ: ergo eſt æquilibrium *. *Probo Antecedens*. Si ponas grave O attolli per unum pedem; ſinguli funiculi fiunt breviores uno pede. Sed ſpatium hoc, quod funiculis detrahitur, accedit Potentiæ P; ergo velocitas ipſius P eſt quadrupla velocitatis Ponderis O. Ergo.

* *Pr. 3. Cor. 2. vel 3.*

§. 85. SCHOLION I. Si in Polyſpaſto Figuræ 31. tres tantum eſſent trochleæ C, D, B, omiſſâ A, atque Potentia traheret applicata inter A & B; adhuc maneret Potentia iſthæc ſubquadrupla Ponderis O; eoquod ſuperior Trochlea A neque Potentiam juvet, neque velocitatem ejusdem augeat. Econtra ſi Polyſpaſtus iſta 3. trochlearum (C, D, B) invertatur (*ut in Fig. 33. cernere eſt*) ita ut ſuſpenderetur ex unco ad O, & ex trochlea C penderet onus Q; Potentia in *p* applicata, foret tantum ſubtripla oneris, eoquod hæc in tali filorum diſpoſitione, applicata ſive in *p* ſive in *x*, haberet velocitatem triplam oneris. Ex quo conficitur REGULA GENERALIS *pro quavis Polyſpaſto: Pondus ſe habet ad Potentiam, uti Numerus funium, Pondus ſuſtinentium, ad unitatem*. Id eſt, ut cognoſcas in Polyſpaſto Rationem Oneris ad Potentiam, vide numerum funiculorum in inferiorem vel inferiores trochleas agentium; numerus hic ad unitatem relatus dabit quæſitum. Sic ſi in inferiores trochleas agerent funiculi 5, haberet ſe Onus ad Potentiam ùt 5 : 1.

§. 86. SCHOLION II. Supponimus 1mo. in Polyſpaſto funiculos omnes eſſe parallelos inter ſe: nam in non parallelis requiretur paulo major Potentia. 2do. Pondus O pendere ex Centro vel Axe inferiorum trochlearum: ſi enim hoc non fieret, diſponerenturque trochleæ *a*, *b*, *c* libere, prout in *Figura* 32. apparent; multo minor requireretur Potentia reſpectu ponderis: etenim hæc applicata in *a*, geſtaret Ponderis dimidium, at applicata in *b* partem illius quartam, in *c* octavam, & ſic deinceps in eadem progreſſione Geometrica.

Quomodo Polyſpaſti trochleæ binis capſis vel ciſtulis includi queant, videri paſſim poteſt apud noſtrates operas. Tab. II.

ARTICULUS V.
De Plano Inclinato.

§. 87. DEFINITIO I. Planum HA dicitur *Inclinatum*, quando cum Plano Horizontali HD efficit angulum H, qui & *Angulus Inclinationis* vocatur. Fig. 34.

DEFINITIO II. *Gravitas abſoluta* (v.g. Corporis C) vocatur illa, quam hoc Corpus habet libere ſibi relictum absque ullo ſibi ſubjecto Plano. *Gravitas reſpectiva* eſt momentum, quod habet Corpus in ipſo Plano conſtitutum.

PROPOSITIO XXI.

§. 88. *Si ſuper Planum Inclinatum* HA, *cujus baſis* HD *ſupponetur eſſe ſemper horizontalis, trahatur Sphæra directione* Cx, *quæ ex Centro* C *ducitur parallela cum Plano* AH: *erit æquilibrium inter Pondus* C *&* *Potentiam trahentem* P, *ſi ſit* C *ad* P, *uti Plani longitudo* HA *ad ejusdem altitudinem perpendicularem* AD:

DEMONSTRATUR. Ducatur verticalis C*tu*, & ex C in Plani punctum *r*, in quo Sphæra & Planum ſe tangunt, recta C*r*, quæ erit Perpendicularis *; ex *r* ducatur *rs*, perpendicularis in verticalem: repræſentabunt lineæ C*r*, *rs*, vectem angularem, cujus fulcrum ſit *r*, & ex cujus puncto *s* pendeat totum Pondus ipſius C, verticali directione *su* deorſum tendens. Quia igitur Potentia & Pon-

* Geomet. Prop. 19.

Tab. II. dus trahunt perpendiculariter; erit C del ex s pendulum ad P, uti reciproce C r ad rs. Atqui ut C r ad rs, ita etiam eſt HA ad AD (*Nam cum Triangulum rectangulum* Csr *ſimile ſit alteri* Crt *, *& hoc ſimile ipſi* Hut, *iſtud vero pariter ſimile ſit ipſi* HDA; *ſimilia ſunt inter ſe extrema* Csr *&* HDA, *adeoque ut in primo eſt Hypotenuſa* Cr *ad ſuum Cathetum* rs, *ita & in poſtremo eſt* HA *ad* AD) Ergo etiam eſt C:P::HA:AD. *Q. e. d.*

* Geom. Prop. 27.

ALIA DEMONSTRATIO. Ponamus Potentiam P (in cujus locum ſubſtituemus Pondus, e trochlea x pendens) deſcendere per ſpatium Am, v.g. 1 pedis; movebitur etiam grave C ſuper Planum per tantundem ſpatii (v.g. per Ht = Am). Altitudo autem perpendicularis, per quam onus C aſcenderit, & ſecundum quam reſiſtit ipſi P, erit ut. Igitur erit æquilibrium, ſit ſit C ad P, uti reciproce ipſorum ſpatia Ht, tu*. Atqui ut Ht ad tu, ita etiam eſt HA ad AD; ergo etiam eſt æquilibrium, dum eſt C; P : : HA ; AD. *Q. e. d.* Quare ſi HA ſit dupla vel tripla ipſius AD; erit Potentia P ſubdupla vel ſubtripla ipſius C. *Hæc demonſtratio poſterior non globis ſolum, ſed & aliis Corporibus accommoda eſt.*

* Pr. 3. Cor. 2. vel. 3.

§. 89. COROLLARIUM I. Siquis vellet in priore directione x C z retinere globum quietum; deberet in z applicare vim parem ipſi P, ac proinde parem illi, qua conatur globus deſcendere. Unde ſequitur, hunc conatum Globi i.e. gravitatem reſpectivam eſſe ad gravitatem abſolutam, uti AD ad AH.

§. 90. Corollarium II. Cum ſit C:P:: HA:AD; HA autem ſumi poſſit pro ſinu toto ſeu Radio, & AD pro ſinu anguli H; erit ſemper C ad P, uti Radius ad ſinum anguli Inclinationis. Igitur gravitas reſpectiva eo minor eſt, quo longior eſt ipſa HA, manente interim eadem altitudine AD. Tab. II.

§. 91. Corollarium III. (*Vide Figuram 30, in qua concipe duos globos c & C, non conjunctos per filum, ſed omnino ſeparatos*). Si idem grave C ſuſtentetur ſuper diverſa Plana Inclinata HA, *b*A; erunt illius gravitates reſpectivæ (quas vocabimus R&*r*) ſuper illa, uti ſinus angulorum inclinationis (H&*b*). Nam ſi conjungas Plana ita, ut acquirant communem altitudinem AD; erit in Plano HA

C:R::Sin. tot.:Sin. H. pariter in Plano *b*A
C:*r*::Sin. tot.:Sin. *b*. Quæ Proportiones ſi *alternando* diſponantur, patebit eſſe R:*r*:: Sin. H:Sin. *b*.

Secundo, ſequitur porro, duo Corpora C&*c*, æquilibrium ſervantia ſuper diverſa Plana HA, *b*A, eandem altitudinem AD habentia, & conjuncta per Chordas (CV, *c*V) planis parallelas, eſſe inter ſe uti ſuorum Planorum longitudines HA, *b*A. Nam quia eadem vis (V) quæ in V ſuſtentat ipſum C, valet etiam ibidem ſuſtentare ipſum *c*, inde eſt

V:C::AD:HA. Pariter
V:*c*::AD:*b*A. Facta autem ut ante alternatione, erit C:*c*::HA:*b*A.

Tab. II. §. 92. SCHOLION I. Quia Hypotenuſa ſemper major eſt altitudine; erit etiam gravitas abſoluta ſemper major reſpectivâ, & Potentia P minor ipſo C, donec tandem angulus inclinationis ex acuto fiat Rectus. Quod dum evenit, requiritur Potentia P par ipſi C. II. Dum equus trahit currum ſuper Planum inclinatum, præter difficultatem, quam experitur eundem trahendi in Plano Horizontali, gravatur inſuper reniſu; qui ſe habet ad totum currûs onus, uti Plani altitudo ad ipſummet Planum.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 35. §. 93. I. *Si Potentia* P *Globum* C *ſuper Planum inclinatum retineat in æquilibrio directione* CP, *parallelâ ad Plani baſin* HD; *erit P ad C, ut altitudo AD ad baſin DH.* DEMONSTR. Duc ut ante tum ad Planum tum in verticalem perpendiculares C*r*, *rs*, & ex *r* in CP perpendicularem *rx*. Repræſentabunt ipſæ *xr*, *rs* Vectem angularem *xrs*, in cujus puncto *s* vigeat totum Globi Pondus, eritque P : C :: *sr* : *rx*, vel ob *rx* = *s*C, P : C :: *rs*, *s*C. Atqui ut *rs* ad *s*C, ita etiam eſt AD ad DH (*ob ſimilia Triangula* rsC, trC, tuH, ADH) Ergo etiam eſt P : C :: AD : DH. *Q. e. d.*

Fig. 36. §. 94. II. *Si Potentia* P (*vel* Q) *trahat Globum directione ad Planum non parallela, v. g.* CP (*vel* CQ) *ita ut hæc directio faciat cum Plano* (*ſubinde ſi neceſſe ſit producto*) *angulum* PIA (*vel* CQI) *qui vocari ſolet* angulus tractionis, *ſitque æquilibrium inter* P & C: *erit* P *ad* C, *ut Sin. Anguli inclinationis* H *ad Sin. Complementi anguli tractionis* I *vel* Q. Ut ſi H ſit 47°. & I 30°; erit P ad C, ut Sin. 47° ad Sinum 60°. DEMONSTRATUR. Duc ut ante Perpendiculares C*r*, *rs*, *rx*. Erit propter Vectem angularem *xrs*, P : C :: *sr* : *rx*. Atqui eſt *sr* ad *rx*

uti Sinus anguli H ad dictum Sinum Complementi. Ergo etiam ita eſt P ad C. *Probo minorem*. Primo ob ſimilia Triangula C*sr*, C*rt* *, H*ut*, eſt angulus H æqualis angulo *r*C*s*, cujus Sinus eſt ipſa *rs*, ſi ipſam C*r* pro Radio accipias. 2*do*. in ſimilibus Triangulis *IrC*, *rxC*, æquales ſunt anguli I & C*rx*, iſtiusque Complementum eſt angulus *x*C*r*; hujus vero Sinus eſt ipſa *xr*, accipiendo rurſus ipſam C*r* pro Radio. Ergo eſt *sr* ad *rx*, ut Sinus anguli Inclinationis H ad Conſinum anguli tractionis I. *Q. e. d.* Tab. II. * Geom. Pr. 27.

§. 95. SCHOLION. Pariter ſi quivis angulus tractionis Q, qui cadit inter *r* & A, ſit æqualis ipſi I, erit eadem quæ ante demonſtratio, & Potentia Q æqualis ipſi P. II. Quo major evadit angulus I, vel potius, quo major efficitur ſinus anguli I, eo major requiritur Potentia P, donec hujus directio coincidat cum verticali N*s*, quo caſu erit P ⌶ C. 2*do*. Quo major ſit angulus Q (inter *r* & A) eo major requiritur Potentia Q, donec tandem directio ipſius Q coincidat cum ipſa C*r*, ubi gravitas ipſius C ſuperabit quamlibet Potentiam, eoquod ſicut angulus Complementi tunc penitus evaneſcit, nec ullam habet ad Sinum anguli Inclinationis Rationem, ita nec ulla Potentia ad vim C. III. Inter Potentias eundem Globum in eodem Plano inclinato ſuſtentantes omnium minima eſt illa, quæ directione ad Planum parallela eundem trahit: cum ſit hic * P ad C velut *rs* ad *r*C, i. e. ut Sinus ad Hypotenuſam; aliæ autem Potentiæ (*in Fig.* 35 & 36.) ſint ad C, ut una eademque *rs* ad *rx* i. e. ut Sinus ad Sinum; ſed ipſæ *rx* tanquam Sinus ſunt minores quam Hypotenuſa *r*C: ergo *rs*, comparata ad Hypotenuſam, eſt minor, quam comparata ad Sinus. Igitur *rs* ſive Potentia in prima comparatione, ubi parallela eſt cum Plano, eſt omnium minima. * Fig. 34.

ARTICULUS VI.
De Cochlea.

§. 96. DEFINITIO. *Cochlea* eſt Cylindrus in plures ſpiras exuberantes æquabiliter elaboratus. Cochlea hæc vocatur *Mas* re-

Tab. II. ſpectu alterius (quæ *Mater* vel Matrix dicitur) a qua excipitur, & quæ æqualem habet cum Mare Diametrum, eſtque in ſpiras concavas elaborata, ita ut convexæ Maris helices exacte quadrent concavis Matris ſtriis.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 38. §. 97. *Potentia* P *ſuſtentabit ope Cochleæ onus* O *in æquilibrio; ſi* P *ſe habeat ad* O, *ut diſtantia* a b *duarum helicum ſeu ſpirarum ad ipſam Peripheriam circularem* M N, *deſcribendam ab ipſa Potentia* P, *Cochleam gyrante.*

* Pr. 3. Cor. 2. DEMONSTR. Potentia eſt in æquilibrio cum Onere, ſi hæc ſit ad illud, ut ſunt reciproce ipſorum ſpatia percurrenda *. Atqui ſi ſit P ad O, ut intervallum *ab* ad Circuli Peripheriam MN, hoc ipſo eſt P ad O uti reciproce ſunt amborum ſpatia percurrenda. Ergo erit P cum O in æquilibrio. *Probo minorem.* Si ponas ipſam P ſemel gyrari per Circulum MN; movebitur O eodem tempore per altitudinem ſpatii *a b*. Ergo ſi ſit P *ad* O, ut *a b* ad MN, erit P ad O reciproce, uti ſunt ipſorum ſpatia.

COROLLARIUM. Quo anguſtius eſt intervallum *a b* duarum helicum, item quo Vectis RP longior, eo majorem Rationem habebit O ad P, atque hinc eo minor requiritur Potentia.

§. 98. SCHOLION. Alii conſiderant Cochleam inſtar Plani inclinati ſpiraliter Cylindro Circumvoluti, indeque illius vires æque, ac in Propoſitione præſente factum, deducunt. Variæ autem fiunt Cochleæ applicationes: modo enim intra Matricem im-

mobilem Mas movetur; modo Mare quieſcente Matrix per Marem immobilem volvitur, qui uterque modus ad conſtringendum potiſſimum adhibetur, ut in torcularibus & Bibliopegorum aliorumve artificum prælis. Aliàs Maris una vel ambæ extremitates ſtriis & ſpiris carentes intra retinaculum gyrantur in circulum, tuncque Matrix & quidquid huic adhæret magna vi per Marem movetur. Tab. II.

ARTICULUS VII.
De Cuneo.

§. 99. DEFINITIO. *Cuneus* eſt Priſma habens baſes Triangulares Iſoſcelicas, quarum una apparet in ABC. Fig. 39.

PROPOSITIO XXIV.

§. 100. *Si duo obſtacula (v g. duo Cylindri ſe tangentes,* M & N*) ſint ab invicem divellenda per Cuneum* ABC; *erit æquilibrium inter Cunei vim prementem* P, *& obſtaculorum reniſum, quem vocabimus* O; *ſi ſit* P *ad* O, *ut Trianguli* ABC *Baſis* AB *ad ejusdem altitudinem* C*a*.

DEMONSTR. Deſcendat Cuneus per altitudinem C*a*, tanquam ſuam viam; receſſerint obſtacula per intervallum AB. Atqui ſi ſit P : O : : AB : C*a*; erit Potentia ad O reciproce, uti ſunt ipſorum viæ, habeturque hoc caſu æquilibrium. Ergo.

COROLLARIUM. Quo minor Baſis AB, ſive quo acutior eſt Cuneus, eo minor requiritur Potentia.

SCHOLION. In ligno findendo aliter ſe res habet, ut oſtendit Graveſandus in Elem. Phyſ. Math. L. I. C. 14. Verum ob maxime variam diverſorum lignorum eorumque diverſarum partium reſiſtentiam regulæ parum ad praxin faciunt. 2. Ex Cunei Priſmatici vi facile intelligitur vis Cunei pyramidalis & Conici, atque hinc vires cultri, pugionis, acus &c.

Tab. II.

SCHOLIA GENERALIA.

§. 191. I. Potentia, quæ in Vecte aliisque Machinis hactenus explicatis æquilibrium ſervat cum onere, ſi vel pauxillum augeatur, prævalebit Ponderi, iſtudque vel movebit vel levabit.

II. Machinarum hucusque explicatarum vis atque utilitas in eo verſatur, quod Potentia de ſe inſufficiens ad Pondus aliquod vel ſuſtentandum vel movendum, reddatur ad id per Machinam potens ac ſufficiens. Modus autem univerſalis, quo id præſtatur conſiſtit in eo, ut, dum Potentia & Onus ſimul moventur, hæc velocius moveatur quam iſtud. Quanquam autem animal Machinæ applicatum hoc pacto acquirat virium compendium, temporis nihilominus diſpendium facit; ſive quantum lucratur facilitatis, tantum deperdit temporis. Sic ſi Homo valeat intra unum minutum advolvere lapidem centum prope librarum adhibito certo inter operandum celeritatis gradu; per Machinam in qua ſit Potentia ad onus ut 1 : 100, eundem lapidem advehet vi ſubcentupla quidem, ſed per tempus prioris centuplum, i. e. per 100 minuta ſi tanquam Potentia eodem celeritatis gradu agat in Machinam. At enim homo Machinâ hujusmodi adjutus par efficitur continuando diutius eidem labori, absque machina brevi defatigandus & labori proſequendo impar. Ubi vides, temporis jacturam, quam Machina adfert, compenſari alio ingenti emolumento.

III. Machina non auget Hominis, aut alterius Potentiæ vires abſolutas, ſed tantum reſpectivas, ſcilicet in ordine ad Pondus tardius movendum, quam moveatur ipſa. Ita neque Oneris vires abſolutæ minuuntur, ſed ſolum reſpectivæ propter Machinam; cum æque difficile ſit Oneri gravi vincere aliud Pondus æquale æquali ſecum celeritate movendum, quam vincere Pondus ſubcentuplum, at centies majore velocitate movendum.

APPEN-

APPENDIX
DE
MACHINIS COMPOSITIS.

§. 102. Quænam Machinæ ſimplices, quænam Compoſitæ ſint, non æque inter omnes convenit. Si retenta Definitione 7ma Cap. 1. Art. 1. ſimplicem voces eam, quæ ſine concurſu alterius Machinæ, vel ſimilis vel diverſæ, effectum ſuum operatur, erunt inter ſimplices reponendæ ſequentes: Vectis, Libra, Statera, Axis in peritrochio, Trochlea Monoſpaſtos, Planum inclinatum, Cochlea, Cuneus. Compoſitam deinde vocabis illam, quæ ex diverſa combinatione aut conjugatione machinarum plurium vel ſimilium vel heterogenearum exurgit. Inter Compoſitas itaque reponenda erit Polyſpaſtos §. 83, & §. 86, n. 2. item Planum duplex inclinatum §. 91. n. 2., eruntque hæ compoſitæ ex pluribus homogeneis. Verum ut a tricis ad utilia pergamus, ſermo nobis hic erit de machinis ita in ſe agentibus, ut vis per unam exercita applicetur alteri tanquam Potentia. De Machinis ita Compoſitis hæc valet Regula Generalis: *Potentia Machinæ compoſitæ applicata habet ad Onus in æquilibrio ſuſtinendum Rationem Compoſitam ex omnibus Rationibus Machinarum ſingularum ſeorſim ſumptarum.* In Exemplis Regula evadet perſpectiſſima.

MACHINA COMPOSITA
EX VECTIBUS HETERODROMIS.

§. 103. I. Sint tres Vectes primi generis (AB, BC, CD) & gravitate carentes, in quorum ſingulis ſeſe habeat Potentia ad onus, ut 1 ad 10. Diſponantur Vectes, uti Figura monſtrat. Dico, ſi ex A pendeat Pondus unius Libræ, fore ut in æquilibrio conſiſtat cum 1000 libris in D applicatis. Nam dum pendet P ex A, ſurſum urgetur punctum B viribus 10 librarum; quæ vis 10 librarum quia communicatur Vectis ſecundi puncto primo B, iſtudque ſurſum urget; fit, ut punctum C deorſum feratur vi 100 librarum. Hæc ipſa vis 100 librarum Fig. 41.

cum communicetur Vectis tertii puncto C, urgebitur ejus punctum D ſurſum vi 1000 librarum, quæ vis ſurſum urgens ut præciſe deſtruatur, debet in D appendi Pondus O, ipſi æquale, ſcil. = 1000 libr. Proinde P eſt hîc ad O in Ratione Triplicata Rationis 1 : 10; ſive P:O :: 1 : 1000. Eadem Ratio Ponderis P ad O elicitur ex motu amborum inter ſe comparato: nam in Vecte AB movetur punctum B decies tardius quam A; & in Vecte ſecundo punctum C decies tardius quam C, proinde centies tardius quam A: demum in Vecte CD punctum D movetur decies tardius quam C, ac proinde millies tardius quam A: Ergo iterum P:O :: 1:1000.

MACHINA COMPOSITA
EX DIVERSI GENERIS VECTIBUS.

§. 104. II. Ex conjugatione Vectis primi & ſecundi generis efficitur Machina ingentibus Oneribus ponderandis apta.* AB eſt Statera Romana ſuſpenſa ex Axe C. FH eſt Vectis ſecundi generis habens Hypomochlion in H; in F & A eſt clavus, circa quem mobile eſt utriusque Vectis punctum perforatum F & A: talis etiam clavus eſt in H. Demum anſæ CN & HM ſuſpenſæ hærent ex firmis uncis prope N & M. In D & K applicantur graviora pondera, quæ Vectibus æquilibrium concilient, antequam onerentur. Jam vero ſi diſtantia HG ſit ad alteram HF, ùt 1 : 12, & AC ſit ad CP ùt 1 : 10; erit pro æquilibrio habendo P ad O, ùt 1 ad 120. Quare P 10 librarum æquilibrabitur cum O 1200 librarum.

*Tab. III. Fig. 42.

DE ROTIS DENTATIS.

§. 105. III. ROTA DENTATA nihil equidem aliud eſt, quam Axis in peritrochio, id tamen commodi habens præ illo vulgari, quod auxilio tympani, Rotæ applicati, longe facilius moveatur, quam is, qui ſcytalis gaudet manu apprehendendis. Rotæ ipſæ a varia dentium diſpoſitione varia ſortiuntur nomina: nam ſi hi exiſtant in Plano circulari, vocatur *Rota Stellata*, Stern-Rad. Si dentes inſiſtant perpendiculariter ipſi Plano

verticaliter ſito, vocatur *Pectinata*, Kamm-Rad. At ſi emineant perpendiculariter in Plano hoc horizontaliter ſito, vocatur *Coronata* (Cron-Rad). Dentes hi vel movent *tympanum* (das Getrieb) circa axem pariter mobile, vel moventur ab iſto. Tympanum hoc, ſeu Laterna, componitur ex certo *verticillorum*, ſeu paxillorum numero (aus Trieb-Stecken) qui ſeſe inſinuant in dentium, qui in Rota ſunt, interſtitia. Jam vero ut Machinæ ex pluribus Rotis compoſitæ vim ſupputemus, ſint tres Rotæ * A, B, C; Radius Rotæ A ſit decuplus Radii Cylindri GH; & Radius Rotæ B decuplus Radii in tympano *t*; item ille Rotæ C decuplus Radii in tympano *s*; ſit demum pariter Radius Manubrii P*m*, in gyrum volubilis, decuplus Radii tympani *r*. Erit itaque primo pro ſtatu æquilibrii Potentia P manubrio applicata ad illam, quæ ei in tympani *r* verticillis reſiſtit, ut 1 : 10. Hæc autem vis (= 10) quia adminiculo paxillorum communicatur Rotæ C; habebit ſe vis hæc communicata ad illam tympani *s* paxillis reſiſtentem, ut 10 : 100. Porro vis iſta (100) communicata Rotæ B habet ſe ad reniſum in tympano *t* ut 100 : 1000. Pariter hæc communicata Rotæ A, eſt ad Onus O renitens in Cylindro, ut 1000 : 10000. Quare libra 1 in P applicata ſuſtentat in O libras 10000: adeoque P eſt in dato exemplo ad O in Ratione quadruplicata Rationis 1 : 10. Viciſſim autem dato onere O, datisque tum Rotarum tum tympanorum Radiis, erui poteſt quantitas Potentiæ P. Neque Machinæ hujusmodi rotatæ ſupputatio differt ab illa Machinæ, ex pluribus Vectibus (ut in compoſitæ. Fig. 41.) * Fig. 44.

§. 106. *Quæres*, perindene ſit, quos & quot paxillos tympano, & quot Dentes Rotæ tribuas? *Respondeo Negative*. Sed tenenda certa inter utrosque Ratio. Quæ res quia ad conſtruendas Machinas rotatas multum momenti habet, in gratiam Tyronis praxeos ſtudioſi breviter illam declarabo per aliquot Problematum reſolutiones.

Problema I. *Dato numero paxillorum in tympano* r, *& numero dentium in Rota* C, *invenire, quoties tympanum ſit gyrandum, dum Rota* C *ſemel convertatur.* Di-

vide numerum dentium per numerum paxillorum; & quotus oſtendet numerum converſionum tympani. Habeat e. g. Rota C dentes 30, & tympanum *r* paxillos 5, quoniam itaque quini ſemper dentes tympanum ſemel gyrari faciunt, convertetur iſtud toties, quoties quinarius continetur in 30, ſcil. hic ſexies. Si tympano forent paxilli 7, converteretur hoc quater & $\frac{2}{7}$, dum Rota A ſemel circumagitur.

PROBLEMA II. *Datâ Machinâ rotatâ, explorare, quoties Rota prima circumagenda, dum ultima ſemel gyratur.* Sit Machina trium Rotarum A, B, C; A habeat dentes 80, B 60; tympanum *t* habeat paxillos 10, *s* 8. Quæritur, dum Rota A ſemel gyratur, Rota C quoties convertetur? RESOLUTIO. Dum Rota A ſemel convertitur, gyratur tympanum *t*, conſequenter & Rota
Probl. I. B, octies: & ob 60 dentes in B, agent nunc in tympanum *s* dentes 8 × 60 = 480. Hi facient tympanum *s*
Probl. I. una cum Rota C gyrari ſexagies, dum Rota A unum abſolvit circuitum.

PROBLEMA III. *Dato numero (60) dentium in Rota A, ejusque Semidiametro = 1 pedi vel 1000‴, & numero (5) paxillorum in tympano futuro t in quod Rota A agat, invenire Diametrum tympani.* Quære *primo* Pe-
* Geom. ripheriam Rotæ ex Radio *, quæ erit = 6280‴ (nam ut
§. 179. 100 : 314 :: 2000‴ : 6280‴) *Secundo*, quære partem ſimilem, quæ ita contineatur in inventa peripheria (6280) ſicut 5 in 60, i.e. ſicut numerus paxillorum in numero dentium Rotæ; erit hæc proxime 523‴, qui numerus præbet tibi tympani peripheriam, ex qua porro quære Diametrum = proxime 166‴. Quare dum pro Horologio inſtruendo tribus Rotis, & Perpendiculo 9 circiter pollices Pariſinos longo audis laudari haſce dentium & verticillorum Rationes, ut Rotæ infimæ & majori tribuantur dentes 72, ſecundæ B dentes 60, tympano autem, quod axi hujus Rotæ affixum eſt, Verticilla 7; denum Rotæ C dentes 35, & hujus tympano Verticilla 6: determinatâ ſemel Rotæ A Diametro, determinabitur per Probl. præſens Diameter tympani primi; & definitâ Ro-

tæ B Diametro (quam convenit eſſe paulo minorem illa prioris A) ſimiliter definietur Diameter tympani ſecundi.

Problema IV. *Datis Potentia* P *&* *onere* O *æquilibrandis, determinare non ſolum numerum Rotarum & tympanorum; ſed etiam horum Diametros; imo & dentium atque paxillorum numerum definire.* Sint duo viri ſingillatim vim 25 librarum in Machinam adhibentes, qui proinde conjunctim efficiant vim = 50. Onus ſit = 1000 libr. Resolutio. Vide, quoties Potentia contineatur in Onere; Quotus erit 200, atque adeo debet eſſe P:O::1:200. Hunc numerum (200) reſolve in numeros tales, qui per ſeſe multiplicati eundem vel omnimode vel ſaltem proxime producant, v.g. in 7, 6, 5. Nam 7×6×5 = 210; vel in 8, 6, 4, quia 8×6×4 = 192; quanquam præſtet eligere Multiplicatores, qui producant numerum dato 200 potius majorem quam minorem. Jam vero quot Multiplicatores ſtatuiſti, tot Rotæ erunt adhibendæ, in quibus ubique Semidiametri vel Axis vel tympanorum ſe habeant ad Semidiametros Rotarum uti 1 ad Multiplicatores ſupra inventos. Igitur pro Machina Rotarum A, B, C, erit majoris Rotæ A Radius ad Radium Axis ſeu Cylindri ut 7:1. Rotæ ſecundæ B Radius erit ad Radium ſui tympani *s* ut 6:1. Et in Rota tertia, vel ſi pro ea adhibeas manubrium, erit hujus Radius ad Radium tympani *s* ut 5:1. Ratio: O eſt ad P in Ratione Compoſita omnium Machinarum ſeorſim ſumptarum: Atqui ſi ponantur iſtarum datæ Rationes 7:1, 6:1, 5:1, Ratio ex his Compoſita eſt 7×6×5:1, vel 210:1. Ergo &c. Quod erat *primum* & *ſecundum*. Quoad *tertium* ſtatuendus eſt in Rota majore A talis dentium numerus, ut hi reſpectu oneris levandi firmitatem ſufficientem retineant. Tympano autem *s* juvabit dare talem verticillorum numerum, ut manente Ratione 1:6 (*quam tympani* t *Radius habet ad Radium Rotæ* B) Rota B fiat aliquanto minor præcedente A; pariter Manubrii gyrus fiat minor Rotâ B. Prætereà cum Rota A ſuſtineat vim maximam, B minorem, Manubrium minimam, conveniet firmitatem majorem concedi Rotæ A, minorem Rotæ B. Itaque ſi tribuas Rotæ A Diametrum 4000‴, ci-

Fig. 44.

demque dentes 48, poteris tympano *t* dare paxillos 7 vel 6; tum enim ſervata Ratione 1 : 6, obtinebit Diameter Rotæ B ferme 3492‴ vel (ſi paxillos 6 in *t* ſtatueris) 2994‴. Et ſic porro. Finita demum ſupputatione comperies *, eſſe motum ipſius O ad motum ipſius P, uti reciproce eſt P ad O.

*Probl. 2.

DE COCHLEA INFINITA
MACHINÆ COMPOSITÆ APPLICATA.

§. 107. Si Cylindro AB (*Tab.* II. *Fig.* 40) circumvolvantur duæ tresve helices ſpirales, quales Cochlea requirit, quæ, dum Manubrium BP ſemel rotatur, ſufficiant ad promovendum unum Rotæ R dentem; organon hoc vocatur *Cochlea infinita*. Machina compoſita ex tali Cochlea & Rota dentata ingentes exerit vires, quas ita ſupputamus.

Si ex Rotæ R Cylindro C pendeat Onus O, & Manubrio BP applicetur Potentia P; habebit pro æquilibrio O ad P Rationem Compoſitam ex Ratione intervalli *rs* duarum helicum ad peripheriam Manubrii, & ex Ratione Radii FC in Cylindro ad Rotæ Radium CD. Nam primo habet ſe, pro ſtatu æquilibrii, P ad vim ipſi Cochleæ reſiſtentem, ut *rs* ad gyrum ipſius P*. 2do, Si hæc vis cogitetur eſſe applicata denti, qui intra duas helices movendus eſt; habebit ſe iſthæc ad Onus ſuper Cylindrum, ut FC ad CD. Ex quo exurgit dicta Ratio Compoſita. EXEMPLUM: ſit Diameter Manubrii 7″, *rs* = 1″; erit P ad vim ipſi Cochleæ renitentem ut 1 : 22. 2do ſit DC decuplus Radii FC, erit illa vis (= 22) denti applicata ad onus ſuper Cylindrum, ut 22 ad 220. Igitur P : O :: 1 : 220, quæ poſtrema Ratio componitur ex his, 1 : 22, 1 : 10. Si in P applicaret homo unus vires = 100 librarum, æquivaleret unus ille 220 hominibus easdem vires extra machinam exerentibus.

*Pr. 23.

ALITER Machinæ hujus vires ſupputabis, ſi peripheriam Manubrii multiplices per numerum circumvolutionum Cochleæ vel (quod idem eſt) per numerum dentium in Rota R: quo facto habes ſpatium a Potentia percur-

rendum interea, dum Onus O percurrit ſpatium periphe- riæ Cylindricæ ad C. Jam vero ſi iſta ſpatia Potentiæ & Oneris eodem tempore percurrenda voces S & s; erit pro æquilibrio $S \times P = s \times o$ *, atque hinc $P : O :: s : S$. * Pr. 3. Cor. 7.

Cæterum habet hoc Cochlearum genus magnum uſum ad inducendum in machinis tardiſſimum motum, ut ſi in Machina Figuræ 44. ſubſtitueres tympanis r, s, t, Cochleas infinitas, fieret in ultima Rota A motus ſupra, quam credi poteſt, tardus. Poteſt autem viciſſim motus velociſſimus eadem hac Machina excitari: nam (repete Fig. 40. Tab. II.) pone, Rotam R inſtructam eſſe dentibus 50, atque hanc circumagi; itaque cum dens quilibet gyret Cochleam A B totam, gyrabitur intra unam Rotæ R circumvolutionem Cochlea quinquageſies.

Hæc de Machinis Compoſitis ſufficiant, quis enim ſingulas percurrat? cum ad numerum revocari nequeant omnes, atque aliæ ex aliis quovis tempore excogitando inveniantur, diverſisque uſibus deſtinentur. Jam enim Cochlea infinita cum Rotis dentatis; Rotæ dentatæ cum Trochleis & Polyſpaſtis; Polyſpaſti cum Polyſpaſtis; Polyſpaſtus cum Plano inclinato; Trochlea cum Axe in Peritrochio committitur &c. Adi Moletrina, Prœla, Piſtrina, Officinas Monetarias, Gerania, Machinas aſſarias, Aurigarum Pancratia (Winde) & variam ubique Machinarum ſimplicium conjugationem & uſum videbis. Alias cernes ſimplicibus idcirco ſubſtitutas, quod harum vis infirmior conſequendo effectui non ſufficeret; alias eo fine advertes uſurpari, ut ſpatium anguſtum occupent, quales ſunt Machinæ rotatæ; alias deprehendes animari appenſis ponderibus, ut in Horologiis obvium eſt; alias aquæ motus concitatior vel lapſus, alias ventus, ignis, animalium vis viva agitabit. Conſulere ſuper his juvet P. Schotti Technicam curioſam; Leupoldi Theatrum Machinarum, opus inſigne; Belidorii Architecture Hydraulique, Muſſchenbroeckii Eſſai Phyſique Cap. 8; Maſſueti Phyſicam; Theatrum Machinarum Böckleri; Ramellii, cui tamen vitio vertitur, quod Machinas afferat nimium & compoſitas & frictione præpeditas; demum pretioſum Librum, Machines approuvees par l'Academie Royale des ſciences. De Automatibus horologiis ſcripſerunt Leutmannus, & Jacobus Alexander O. S. Bened. Congr. S. Mauri, in Libro: Traité General des Horloges.

MANTISSA

De attritu in Machinis, aliisque earundem impedimentis.

§. 108. *Dum ſupra aſſeruimus* *, *Potentiam cum onere in æquilibrio poſitam, ſi tantillum augeretur, motum* * §. 101.

productam in Machina; Machinam Mathematice conſiderabamus, abſtrahentes ab omni frictione, attritu, aliove quovis impedimento, quæ tamen non raro ejusmodi ſunt, ut Potentiæ vim magnopere infringant: id quod experiri cuilibet licet, potiſſimum in Planis inclinatis, Cochleis, Polyſpaſtis, aliisque Machinis, maxime compoſitis. Fuere quidem viri induſtrii, Amontonſius, Leibnitius, Sturmius, Camus &c. qui frictionis quantitatem certo determinare calculo laborabant: at qui exactioribus eandem experimentis verſarunt, cognoverunt denique, illam nec calculo ſubeſſe, nec certis Proportionum limitibus definiri poſſe. Quinque autem potiſſimum ſunt, quæ frictionem & remoram parere animadverſa hucusque fuerunt; ſcilicet 1. Aſperitas & ſcabrities. 2. Appreſſio. 3. Superficies. 4. Celeritas. 5. Calor. Ac

1mo. ASPERITAS, quo major & ſenſibilior, eo magis Potentiæ vim enervat. Nam Corporum duorum A, B (Fig. 43) ſuperficies aſperas reddunt partes hiulcæ, monticulis & cavitatibus interſtinctæ. Dum igitur unius prominentia in oppoſitæ ſuperficiei cavitatem mergitur, vel dum alius monticulus offendit in alium ſibi oppoſitum, remoram motui inde oriri neceſſe eſt, tanto majorem, quanto majora, duriora, pluraque occurrunt obſtacula utrimque ſuperanda, deprimenda, abradenda, complananda. Remedia contra hoc frictionis genus ſunt, 1. Corpori, tollendo vel alium baſin alias raſuro, ſubjicere rotas, globos, Cylindros, ſuper quos nunc volvatur, minore, quam ante baſeos contactu. 2. Machinarum axibus, chelonis & fulcris, lævorem conciliare. 3. Eadem oleo, axungia, unguentis inungere, aquam iis affundere. 4. Cave ne in Trochleis potiſſimum Polyſpaſtis, rotularum peripheria lateralis loculamentum, intra quod retinentur, tangat aut radat: ſed circa Axem duntaxat Rotulæ nonnihil protuberent; ſic enim frictionis vis magna convertitur in longe minorem. 5. Frictio magnopere minuitur, ſi Axis, quem ſuſtinent, imponatur duobus tenuioribus Cylindrulis pariter circa axem rotabilibus, ac ſeſe prope tangentibus. Noli tamen exiſtimare his aliisve remediis omnem omnino frictionem tolli poſſe; viget illa etiamnum in materiis quantalibet ſedulitate

polluit, quarum aſperitas tametſi nudum oculum fugiat; per microſcopia tamen retegitur. Digna lectu ſunt experimenta a Cl. Muſſchenbroeckio capta in Cylindro, cujus axiculos Chalybeos variis impoſuit congruis alveolis: & æqualis quidem frictio erat, dum volvebantur intra alveolos cupreos & plumbeos; æqualis item intra Stanneos & Chalybeos; major tamen erat ſuper duo poſteriora metalla, quam prima. Adhibito dein olivarum oleo, difficilius movebantur intra alveolos orichalcinos inunctos, quam non unctos; difficilius intra Stanneos quam Calybeos. Res eſt Machinarum conſtructoribus notiſſima, ejusdem ſpeciei metalla magis ſeſe atterere, quam quæ ſunt diverſæ. Hinc ſi in Rotis dentes ſint orichalcini, juvat tympani verticilla eſſe ferrea vel chalybea; & Axes ferreos præſtat imponere excipulis orichalcinis.

II. APPRESSIO, *quæ oritur tum ex ipſius Machinæ tum ex oneris movendi pondere, nova frictionis Mater eſt. Amontonſius a ſola preſſione attritum derivabat, ſtatuens, hunc eſſe fere ſubtriplum oneris prementis, ut adeo juxta hunc calculum ad pondus 300 librarum machinâ attollendum impendendæ forent vires 400 libris pares. Atenim Canonem hunc nec univerſalem eſſe, neque pro Ratione aucti Ponderis frictionem creſcere, retectum fuit poſtea.*

III. SUPERFICIES *aucta frictionem auget. Negaverat hoc Amontonſius, eo inductus ratione, quod creſcente ſuperficie etiam creſceret baſeos fulcientis magnitudo. At contrarium evicit Nolletus in Prælect. Phyſ. P. I. Præl. 3. item Muſſchenbroeckius. Neque tamen pro Ratione auctæ ſuperficiei augetur frictio: etenim ſi Nolleto fides, dum ſuperficies ad aliam ſe habet ut 1 : 2, habet ſe frictio ut 3 : 4. Illud compertum, multo plus frictionis ab aucta appreſſione, quam aucta ſuperficie produci.*

IV. CELERITAS *generat in Machina mota frictionem. Obſervante Muſſchenbroeckio, quando velocitates erant ut 4, 6, 7, 8, 10, frictiones erant ut 1, 1½, 2, 3, 4.*

V. CALOR, *ut obſervatum eſt, frictionem aliquantum auget. Excitatur autem facile, dum metallum ſupra metallum, vel lignum ſuper lignum valde velociter movetur.*

Hæc frictionis cauſa facile tollitur inunctione olei, aut effuſione aquæ.

Inter motus impedimenta etiam poſtremo funes recenſendi, quando hi ob nimiam rigiditatem Cylindrum vel Trochleæ orbiculum non ſatis arcte complectuntur, aut quando Axis Semidiametrum augent: ubi notandum pro Praxi, in ſupputatione virium in Axe peritrochii etiam funis Semidiametrum eſſe Semidiametro Cylindri adjiciendam.

Tametſi vero frictionis quantitas nequeat certis calculi regulis comprehendi; ſequentia tamen generalius ſtatuere licet. 1. Attritum eo majorem eſſe, quo plures concurrunt ex ante allatis ejusdem cauſis. 2. Machinas ſimpliciores (ſi tamen levando oneri ſufficiant) præſtare magis compoſitis. 3. Ut cujusvis Machinæ vires utiliter explores, examina primum, quam Rationem (vi Machinæ præciſe atque a frictione abſtrahendo) habeat Potentia ad Pondus appendendum tale, quale ſupremo fere Machinæ robori convenire creditur: deinde in locum Potentiæ ſubſtitue Pondus, par oneri dato ſuſtentando, cui alia ſucceſſive ponduſcula adjicies, dum demum Machina animari, atque Onus levari incipiat; oſtendent ponduſcula, Potentiæ adjecta, frictionis quantitatem. Si fors in loco Potentiæ Manubrium occurrat, huic orbiculum ſubſtitue, ex quo filum cum pondere pendeat.

CAPUT IV.

De Compoſitione virium.

Cum vires compoſitæ crebro in RR. tum Mathematicorum tum Phyſicorum ſcriptis occurrant: de iis nonnihil dicendum exiſtimavimus.

§. 109. DEFINITIO. *Vires compoſitas* voco illas, quæ in idem punctum agunt diverſis directionibus, non tamen directe ſibi oppoſitis. *Motus compoſitus* eſt is, ad quem duæ pluresve cauſæ concurrunt.

Ut ſi navem ſecundo alveo ab ortu verſus occaſum defluentem vel Boreas vel remiges agant verſus meridiem; exurget inde motus compoſitus, uni æquivalens, quo navis medium ingreſſa viam ferretur verſus plagam, quæ inter Meridiem & Occaſum cadit.

AXIOMA.

Si idem punctum F (Fig. 47.) trahant duæ Potentiæ P & Q æquales, & directe, ſive in una linea recta, ſibi oppoſitæ; ſervant æquilibrium inter ſe.

PROPOSITIO XXV.

§. 110. *Si duæ Potentiæ* (P & Q) *ſuſtentent Pondus* (O) *funibus divaricatis* (OP, OQ) *ita ut æquilibrium ſit inter tres has Potentias* (O, P, Q); *tunc ſi ex puncto aliquo* (F) *aſſumpto intra lineam directionis Ponderis* (O) *ducantur rectæ* (FH, FG) *parallelæ ad Potentiarum directiones* (OQ, OP): *erit Potentia* P *ad alteram* Q, *uti in Parallelogrammo* HG *eſt* HO *ad ipſam* OG. Breviter, P : Q :: HO : OG. Fig. 47.

DEMONSTRATIO. Ducatur per F Horizontalis PQ; & producantur (ſi neceſſe ſit) ipſæ PO, QO, ut in eas demitti poſſint ex P & Q perpendiculares QM, PN. Itaque I^mo^. ut Pondus O cum Potentia P conferamus, dum Grave O a fune QO ſuſtentatur, licebit conſiderare ipſam QO inſtar bracchii rigidi in Vecte inclinato & circa Q mobilis (idem enim effectus ſequeretur, ſi funiculo ſubſtitueretur linea rigida QO). Tunc autem diſtantia P ipſius O eſſet QF, & diſtantia Potentiæ P, directione PM trahentis foret QM*; proinde P : O :: FQ : QM. Sed FQ eſt

*Pr. 7. Cor. 4.

ſinus anguli n, & QM ſinus anguli r (ſi ipſam QQ pro Radio accipias). Ergo P:O:: Sin. n : Sin. r. At eſt $n = m$, & $r = s$, habentque ſe in Triangulo FHO latera HO, FO *, uti Sinus angulorum m & s vel n & r: Ergo etiam eſt P:O::HO:FO.

* Geom. Pr. 33.

II^do. Si ſimiliter funem PO conſideres inſtar Vectis inclinati, ex quo pendeat ipſum O, ſuſtentante Vectem hunc Potentiâ Q directione QN; erit Q:O :: FP:PN *, ſive ut Sinus anguli POF ad Sinum anguli PON vel s, ſive (ſi priore ratiocinio utare) uti intra Δ FHO latus FH ad latus FO; adeoque erit Q:O::FH:FO. Sed ex Num. I. eſt etiam P:O::HO:FO. Igitur *commutando & alternando* erit O:FO::Q:FH, & O:FO::P:HO, adeoque P:HO::Q:FH; ac demum rurſus *alternando*, P:Q::HO:FH *vel* OG. *Q. e. d.*

* Pr. 7. Cor. 4.

§. 111. COROLLARIUM I. Ipſum O (*ex demonſtratis*) habet ſe ad alterutram Potentiam P vel Q, uti Diagonalis FO ad OH vel OG. Atque hinc tres iſtæ vires (O, P, Q) in æquilibrio conſtitutæ habent ſe adinvicem, uti FO, OH, OG, vel (ob OG = HF) uti tria latera Trianguli FOH. *Vires Potentiarum P & Q vocantur* Componentes, *& vis ipſius O dicitur* Compoſita.

§. 112. COROLLARIUM II. Datâ igitur Ponderis O (vel cujuscunque huic æquivalentis Potentiæ) directione OF, datisque Potentiarum P & Q directionibus OP, OQ;

invenies harum trium vires pro æquilibrio requiſitas, ſi ex puncto aliquo H, intra unius Componentis directionem electo, ducas rectam H F parallelam cum alterius Componentis directione O Q, & compleas Parallelogrammum.

§. 113. COROLLARIUM III. Cum vires trium Potentiarum O, P, Q, exprimantur per Trianguli O F H latera F O, H O, H F; duo autem latera H F, H O, ſimul ſumpta ſint majora tertio F O; etiam patet, vires componentes ſimul ſumptas eſſe majores ipsâ Compoſitâ.

§. 114. COROLLARIUM IV. Duæ vires *Componentes* O H, H F, expreſſæ in Triangulo F O H, ſunt ad ſeinvicem, ſicut reciproce Sinus angulorum, quos conſtituunt virium iſtarum directiones cum Diagonali Parallelogrammi H G. Datis itaque iſtis directionum angulis, determinabitur ex Trigonometria Ratio trium Potentiarum P, O, Q.

§. 115. COROLLARIUM V. * Si punctum O trahant duæ Potentiæ P & Q, directe ſibi oppoſitæ & æquales, ac proinde æquilibrium efficientes; licebit alterutri v.g. ipſi P ſubſtituere duas alias S & T, directionibus O S, O T trahentes, quæ ſe habeant ad ipſam P, uti in Parallelogrammo S T ſe habent latera O S & O T ad Diagonalem O P: ſic enim duæ vires S & T æquivalent uni Q, proinde & ipſi P. Pari modo licebit Potentiam S reſolvere in duas æquivalentes *r* & *t*, ſi iſtæ ſe habeant ad S, uti in Parallelogrammo *r t* ſe ha- * Fig. 48.

bent latera *or* & *ot* ad Diagonalem *os* : atque nunc tres Potentiæ *r*, *t*, T, æquivalebunt uni P. Pariformiter poſſet ipſa T ulterius reſolvi in alias duas ipſi æquivalentes.

§. 116. COROLLARIUM VI. Viciſſim datis Potentiis quotcunque, v.g. Q, *r*, *t*, T, ſimul trahentibus punctum O, atque in æquilibrio conſtitutis, poſſunt ipſæ ad pauciores imo ad duas reduci; nam duabus *r* & *t* ſubſtitues unam S, modo hæc ſe habeat ad ipſas *r* & *t*, velut Diagonalis Parallelogrammi *rt* ſe habet ad latera *or*, *ot*. Ita porro ipſis S & T ſubſtitues unam P.

NOTA, poſſe unamquamque trium Potentiarum (v.g. S, T, Q) in æquilibrio poſitarum & idem punctum O trahentium, certo reſpectu fieri *Compoſitam*. Ita ſi T ſpectetur ut *Compoſita*, erunt S & Q componentes. Si S conſideretur ut Compoſita; erunt Componentes Q & T.

SCHOLION.

Poſſunt ex hac virium Compoſitione & reſolutione plurima exponi conſectanea, de quibus fuſius ſcripſere Varignonius, Camus in Curſu Matheſeos Gallice edito, aliique. In gratiam Tyronis nonnihil adhuc erudiendi pauca ſolum delibo.

§. 117. I. Ac primo quidem, ut magis pateat Propoſitionis præſentis ejusque demonſtrationis univerſalitas; ſit (*in Figura 49. in qua paululum ſupra litteram G debet adſcribi littera F, ducique horizontalis PF in verticalem OGF*) Potentiarum grave O trahentium una (Q) ſita infra lineam horizontalem per punctum trahendum O traductam: ductis nunc parallelis PG, GH, etiam hic erit P:Q::PO:OH. 1) Nam *primo* Potentia P æquivalet alteri cuipiam trahenti Pondus O pendulum vel ex linea rigida QO, vel ex puncto R Vectis angularis

RQM*, qui perpendicularis ſit ad directiones OR & POM; atque hinc eſt P : O : : RQ : QM, vel ùt Sin. ang. QOR ad Sin. ang. QOM vel PON. Quodſi porro (*quod fieri poteſt & fieri concipimus*) Radio OQ fiat æqualis PO, & NO ≓ MO; erit Triangulum QMO ≓ PNO, & QM ≓ PN. Igitur P:O::RQ:QM vel PN. *Secundo*, reſpectu Potentiæ Q trahentis in Vecte angulari FPN (qui perpendicularis ſit ad directiones OF & QON) erit Q:O::FP:PN vel QM. Igitur poſt alternationem in duabus poſterioribus Proportionibus æqualibus inſtitutam, erit P:Q : : RQ : FP, hoc eſt ut ſinus anguli acuti QOR vel obtuſi QOG, ad ſinum anguli POF vel OGH. Atqui Trianguli GOH duo latera GH, OH; ſunt uti prædicti mox Sinus. Ergo etiam eſt P:Q : : GH vel PO:OH. *Q. e. d.* *Pr. 7. Cor. 4.

Si tractio OQ eſſet horizontalis, fieret tota NOQ horizontalis, PN autem Verticalis; exiſterentque reſpectu Potentiarum P & Q Vectes angulares RQM & FPN. Servatis itaque reliquis ut in Num. I. eſſet Triangulum QOM ≓ PON, & P:O::OQ:QM::PO:PN. Item Q:O::FP : PN; & poſt factam alternationem erit ob æqualitatem iſtarum Proportionum P:Q:: OQ *vel* OP:FP; *vel* P:Q:: OP:OH. *Q. e. d.* Fig. 49.

§. 118. II. Proprietas Plani inclinati explicata in Propos. 21, etiam hic facile demonſtratur in hunc modum (*vide in Tab.* II. *Fig.* 30, *Globum* C *prope angulum* h) Dum primo Gravitas trahit directione Verticali, C*a*, deinde P directione ad Planum parallela, Planum vero reſiſtit directione *bc*; perinde eſt, acſi Punctum C traherent tres Potentiæ in æquilibrio conſtitutæ inter quas ſunt *Componentes* Gravitas & P: hæ itaque tres Potentiæ in Parallelogrammo *ra* exprimuntur lateribus *a*C, C*r*, C*b*; & P quidem ſe habet ad gravitatem ipſius C, ut C*r* ad CA vel *rb*. Atqui ùt C*r* ad *rb*, ita AD ad *b*A (*ob ſimilia Triangula rectangula* AD*b*, *r*Cb, *& Angulum* A ≓ r *propter parallelas* AD, rb; ba, rc) Ergo eſt P ad gravitatem ipſius C, ut Plani altitudo ad hujus longitudinem.

* Fig. 51. §. 119. III. Si Grave * AB ſuſtentent duæ Potentiæ P & Q; earum vires tum inter ſe tum ad ipſum Grave comparatas ita aſſequêris. Perinde eſt, ac ſi Grave ſuſpenderetur ex puncto communi O filis AO, BO, grave autem ejusque Centrum gravitatis deorſum tendat directione verticali OC *. Perinde pariter eſt, ac ſi Grave in C collectum trahatur a Potentia P directione CQ parallela ipſi AP; & a Q directione CP parallela ipſi BQ. Atqui nunc erit P ad Q ut in Parallelogrammo PQ eſt CQ ad CP; & ambæ erunt ad totam gravitatem, ut latera QC vel CP ad OC. Habes igitur Rationem virium hîc ſitæ expreſſam.

* Pr. 9.

Pariter, ſi ſublatâ Potentiâ P, ſubſtitueretur ad A fulcrum ſuſtentans columnæ AB extremum unum; pergatque Q trahere directione BQ; aget fulcrum ad A eodem modo, quo ante Potentia P: unde erit Q ad grave AB vel ad gravitatem in C collectam, ut CP ad CO.

* Fig. 50. §. 120. IV. Si tres Potentiæ * (P, Q, & O, vel R) trahant idem punctum O, æquilibrium inter ſe tenentes: poteſt harum Potentiarum quantitas exprimi lateribus Trianguli ABC, quod oritur tunc, quando per tres directiones PO, QO, OR ducuntur tres perpendiculares CA, CB, BA, quæ concurſu ſuo Triangulum efficiant. DEMONSTR. Si ducas lineam DE parallelam cum PO, oritur Triangulum DOE, cujus latera DE, EO, OD exprimunt magnitudinem trium Potentiarum P, Q, O*. Atqui novum Triangulum ABC eſt ſimile ipſi DOE; ergo etiam iſtud exprimet tres illas Potentias. *Probo minorem*. Productis PO in N, & QO in M, eſt Triangulum rectang. RNO ſimile alteri ANx ※ ob angulum ad N communem & Rectos æquales. Igitur angulus A = NOR = POD = D; atque hinc A = D. Similiter Triangulum MRO eſt ſimile ipſi BSM; igitur angulus B = MOR = DOE: cum igitur anguli A & B exiſtant intra Triangulum DEO, etiam eſt ACB =

* §. 112.

※ *Ad punctum interſectionis linearum* AC, PO (*in hac Figura* 51) *appone litteram x, & ad punctum interſectionis linearum* CB, EO, *litteram s, omiſſas a Chalcographo.*

DEO.

DEO. Ergo. Quare in Triangulo ABC latus CA exprimit Potentiam P, CB ipſam Q, AB ipſam O. Tab. III.

Non ſolum autem Triangulo ABC, vel ſimili ABC (in Fig. 51) ſed & alio *abc* exprimentur tres illæ Potentiæ, ſi nimirum directiones ipſarum P, Q, O, transeant perpendiculariter per latera *bc*, *ca*, *ab*. Ex hac Propoſitione ſequentia fluunt.

§. 121. V. Si duo Plana inclinata * ED, FD ſuſtentent Globum C, vim reſiſtentem utriusque Plani invenies, ſi ex Centro C ducas tres perpendiculares, unam C*m* in Planum ED, tanquam directionem, qua reſiſtit iſtud Planum; alteram C*n* in FD, tertiam in horizontalem EF: tunc enim Trianguli EFD latus EF exponet vim Gravis C, latus ED vim reſiſtentem hujusce Plani, latus FD vim reſiſtentem ejusdem Plani. * Fig. 53.

§. 122. VI. Sit (*in Tab.* II. *Fig.* 37) AD murus vel Planum verticale; Grave C hinc murum contingat, illinc ſuſtentetur a Vecte angulari *dbp*. Quæritur, quæ Ratio intercedat inter *c* & Potentiam *d*, dum æquilibrium ſervant hæc duo? RESOLUTIO. Ducatur ex Globi Centro *c* perpendicularis *mc*, tanquam directio reſiſtentis Muri; deinde *cp* tanquam directio agentis vectis inclinati; demum *ocr* A perpendicularis in Horizontalem *b*A, tanquam directio Corporis gravis: orietur exinde Triangulum A*bo*, cujus latus A*b* exprimet vim gravis, latus A*o* vim muri reſiſtentis, latus *bo* vim bracchii inclinati, aut vim qua ipſum *c* huic bracchio reſiſtit. Itaque ut in Vecte *pbd* ſuſtentetur ipſum *c*, debet eſſe Potentia *d* ad vim reſiſtentis C, mox inventam & expreſſam latere *ob*, uti reciproce diſtantia *pb* ad diſtantiam *bd*.

At ſi *c* penderet libere ex Vecte horizontali *db* A, deberet eſſe *d* : *c* : : A*b* : *bd*. Vide hinc, quam diverſæ ſint vires Corporis ejusdem atque in eodem loco perſiſtentis, quando nunc libere pendet, nunc alio modo ſuſtentatur.

Tab. III.

APPENDIX,

in qua breviore criſi examinatur primarium Statices fundamentum.

§. 123. Non poteras, mi Tiro, præcedentia quatuor Capita perlegere, quin adverteres; fundamentum omnis æquilibrii ſtatici contineri Propoſitione noſtra III, in qua aſſeritur, duo Pondera tunc æquilibrari inter ſe, quando illa ſe habent in ſuarum diſtantiarum Ratione reciproca. Hanc nos Propoſitionem ſolo experimento ibidem comprobavimus; cupientes Tironem, prætervectis ſcopulis, promptius inducere in Statices cognitionem. Non diffiteor equidem nobilius eſſe ſcientiæ genus illud, quod *a priori* potius & ex intima cauſarum penu, quam *a poſteriore*, quemadmodum per obſervationes fit, ſua argumenta depromit: verum quando nuda ratiocinia vacillant, præſtat ad quævis alia certiora confugere. Quodſi nihilominus deſideres, hoc Statices fundamentum tibi comprobari diſcurſu aliquo *a priori* deducto, argumentum ejuſmodi propono, quod mihi præ cæteris ſemper probabatur, quodque ex Keilio *in Introduct. ad veram Phys.* ex Hartſoeckeri *Phyſices Curſu*, ex Belidorii *Curſu Mathem.* ex Deidierii *Mechanica*, aliiſque, paulo contractius daturus ſum per ſequentes Theſes.

§. 124. THESIS I. *Vis Corporis prementis proportionatur ejus velocitati.* Velocitas enim, ad quam propendet & ſolicitatur vis mortua, eſt effectus Potentiæ in Corpore premente aut ad motum nitente. Igitur velocitas duplo, triplo, centuplo &c. major, tanquam effectus arguit Potentiam (tanquam Cauſam) duplo, triplo, centuplo majorem, *per Axioma* 5. §. 13. Hinc

THESIS II. *Si duorum Corporum* A *&* B *Maſſæ* M *&* m *ſint æquales; ipſorum Potentiæ ſeu vires* V *&* v, *erunt ut ipſorum Celeritates* C *&* c. Nec enim aliter vires hic differunt, quam ſecundum celeritates. Itaque quando eſt $M = m$, erit $V:v::C:c$. *Viciſſim*, quando celeritates ſunt æquales, ſcil. $C = c$; vires erunt ut Maſſæ, hoc eſt, $V:v::M:m$. Cum enim ſingulæ Corporis moti particulæ æquali velocitate ferantur, æqualis vis in ſingu-

lis particulis reſidet, atque hinc particulæ duplo, triplo plures, ſive Maſſa dupla, tripla, poſſidet vim duplo, triplo majorem. Ergo. Tab. III.

THESIS III. *Vires* V *&* v *Corporum* A *&* B *ſunt in Ratione Compoſita Maſſarum* M & m *& celeritatum* C *&* c. DEMONSTR. Aſſumatur Corpus tertium X, quod ſit quoad Maſſam æquale ipſi A, ſed habens Celeritatem *c* ipſius B; vocemus hujus X Potentiam & vim P. Erit itaque, *per Theſ.* II,
V : P : : C : *c*. Et propter *c* = *c*, erit pariter
P : *v* : : M : m. Ergo (*per Arithm. Prop.* 31. *Cor.* 4. *pag.* 106.) eſt V ad *v* in Ratione Compoſita Rationum C : *c*, & M : *m*, id eſt, Maſsarum & Celeritatum. *Q. e. d.* COROLLARIUM I. Quia autem poſitis iisdem Rationibus C : *c*, M : *m*, etiam Producta C M, *c m*, ſunt in eâdem Ratione Compoſita * Maſsarum & celeritatum; Vires Corporis A & B rite exprimentur per Producta ex Maſſa in Celeritatem. COROLLARIUM II. Igitur quando vires ſunt æquales, erit M C = *m c*. Atqui tunc eſt M : *m* : : *c* : C. Ergo vires ſunt æquales, quando Maſſæ ſe habent ad invicem uti reciproce celeritates. COROLLARIUM III. Eſt ergo æque difficile movere intra idem tempus Corpus ſimplum cum celeritate dupla, quam Corpus duplum cum celeritate ſimpla: unde ſi duæ hæ vires ſibi directe opponantur ſeu contra ſeſe nitantur; efficient æquilibrium.

* *Arithm.* §. 109.

THESIS IV. *In Vecte eſt æquilibrium, ſi ſint Pondera* M *&* m *reciproce uti diſtantiæ.* Quia namque ut diſtantiæ ita ſunt Celeritates *, erit M : *m* : : *c* : C, adeoque (*per Theſ.* III. *Cor.* 2.) æquilibrium. *Q. e. d.*

* *Pr.* 2.

Hæ Propoſitiones pulchro nexu cohærent, oſtenduntque apposito diſcurſu æquilibrii cauſam: qui ſi tibi Apodicticus videatur, utere eo & fruere. Interim, quid illi ab obſtinatiore quopiam opponi poſſit, non diſſimulabo. Nimirum ut Theſes iſtæ firmo robore conſiſtant; debet in eodem Corpore pro diverſo incremento Celeritatis etiam creſcere vis & intenſitas Potentiæ: atqui ex Theſi I, quæ baſis eſt reliquarum, vi Axiomatis ibidem

Tab. III. uſurpati, ſequitur tantum, incremento celeritatis tanquam effectui reſpondere incrementum cauſæ, relatæ ad ſpatium; utrum vero Cauſa, quæ Corpus agit per ſpatium duplum, triplum &c. ſit etiam ipſa duplo triplove intenſior, incertum relinquitur. Imo ſunt hodie Philoſophi, qui argumentis non contemnendis nixi affirmant, Velocitati duplæ reſpondere cauſam quadruplo majorem quoad intenſitatem virium. *Si dicas:* Hi omnes Authores hoc poſterius ſolum affirmant de viribus vivis, quas aſſerunt eſſe in Ratione Compoſita ex Simplici Maſſarum & duplicata Velocitatum, adeo ut vis ejusdem Corporis triplo velocius moti habeat ſe ad vim cum ſimpla velocitate conjunctam, ut 9 ad 1, & in corpore A alterius B quadruplo cum velocitate tripla, habeat ſe vis ipſius A ad alteram ut $4 \times 9 : 1$, i.e. $36 : 1$; de viribus autem mortuis conſentiunt omnes, eas eſſe in Ratione Compoſita Maſſarum & ſimplici velocitatum ſecundum Theſ. III: *reponet forte adverſarius:* Qui vires vivas ſtabiliunt, vacillare faciunt vires mortuas; nam ſi poſſibile ſit, dari velocitatem duplam cum vi non dupla ſed quadrupla; igitur niſi aliud argumentum accedat, dubitari etiam poterit, utrum celeritatem vis mortuæ ſequatur in eadem an diverſa Ratione intenſitas illius vis. Ita etiam ad Theſin II. reſponderi poterit, differre quidem vires æqualium Maſſarum ſolum ſecundum celeritatem, ſic tamen, ut incertum relinquatur, creſcantne illæ vires in Ratione creſcentium celeritatum, an in alia.

§. 125. Itaque ad tricas haſce elidendas in ſubſidium vocandum eſt experimentum quoddam illuſtre & certum, quo detegatur Naturæ illa lex, quæ velocitatem moderatur. Retegi autem illa poteſt vel methodo a nobis in Propoſitione III. adhibita, vel ſi in Vecte æquilibrato MN (*Tab. I. Fig. 5.*) ſuſpendas primo Pondera A & B æqualia in diſtantiis æqualibus, deinde alterutrum, v.g. B removeas ad diſtantiam duplam, triplam, quadruplam &c; creſcent enim tunc vires unius ejusdemque Corporis B pro Ratione diſtantiarum * atque exinde velocitatum, ad quas diſponitur. Quo experimento dum de viribus ſaltem mortuis firmum redditur, quod Theſi I & II.

* §. 28.

aſſeritur, firmo pariter tale ſubſiſtent Theſes reliquæ, Tab. III.
atque illud præprimis princeps Statices Theorema, Corpora in ſe agentia tunc ſervare æquilibrium, quando ſunt in Ratione reciproca velocitatum.

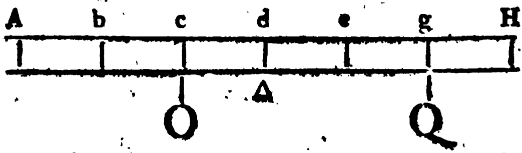
§. 126. Ex eo autem, quod verum nunc ſit, Corporis ejusdem vires eſſe ut velocitates, verum etiam eſt *e converſo*, velocitates eſſe ut vires. Ex falſitate namque poſterioris flueret veritas prioris.

§. 127. *Objicies primo*. Quî aſſeri poteſt æquilibrium de Ponderibus O & P in Ratione reciproca Maſſarum & velocitatum poſitis, cum in æquilibrio omnis motus atque adeo velocitas exulet? *Reſpondeo*, abeſſe quidem motum actualem, idque ob æqualia utrinque momenta motum impedientia, fore tamen motum aliquem, & velocitatem diſtantiis proportionalem, ſi vel tantillum duorum momentorum alterutrum minueretur; cæterum Pondera ipſa ſemper ſunt ad hanc velocitatem vi machinæ prona & diſpoſita.

§. 128. *Objicies ſecundo* cum Recentiorum nonnemine, vires in Vecte creſcentes vel decreſcentes nequaquam debere refundi in velocitates, ſed in hoc, quod gravia, quo propinquiora fulcro fiunt, eo plus ponderis in fulcrum rejiciant; unde fit, ut parvum Pondus queat æquilibrari cum Pondere magno, quod fulcro propinquius ſit. Hanc objectionem idcirco huc adduxi, ut anſam haberem exterminandi erroneam hanc opinionem, in quam plures jam ſequaces video fuiſſe impulſos. Falſum itaque, in quocunque Vecte, v.g. Homodromo AP (*Tab. I. Fig. 6.*) Pondus O partem ſui aliquam rejicere in fulcrum A: nam ſi, ſublatâ Potentiâ ſuſtentante P, manum Ponderi O ſupponas ſentiet illa totum pondus O; vel ſi filum verticale uno ſui extremo adnectas puncto O, alterum conjungas cum Bilancis lance una, neceſſe erit, ut pro æquilibrio obtinendo imponas lanci oppoſitæ pondus æquale ipſi O, manifeſto indicio, nihil Ponderis O exonerari in fulcrum.

§. 129. Monet me iſte error, ut in gratiam Tironis a fallaciis abſtrahendi in medium proferam alium adhuc paralogiſmum, qui ab Archimede originem trahens, non

Tab. III. modo frequentiſſimus eſt apud antiquos, ſed & hodiernis ſcriptoribus uſitatus. Cogita, inquiunt, ambo pondera O & Q poſita in diſtantia



reciproca Maſsarum (quæ ſint e.g. ut 2:1) & pendentia ex Vecte Mathematico AH, mutari & conjungi in unum Parallelepipedum AH, diviſum in 6. partes æquales, quarum ſingulæ æquales ſint diſtantiæ minori *cd*. Hoc pacto repræſentabit Parallelepipedi pars H*e* ipſum Q, & *e*A ipſum O. Atqui prius centrum motus *d* erit nunc Centrum gravitatis (ut examinanti patebit) Ergo in æquilibrio conſiſtent ipſa A*e*, *e*H, i.e. O & Q. Hæc argumentatio quomodocunque a variis inſtituatur, communi iſthoc laborat vitio, quod a Ponderibus primum disjunctis transeat ad illorum conjunctionem, fallaci omnino diſcurſu; nam in ſtatu disjunctionis Q nihil ſui ponderis trajicit trans fulcrum (*ut ex* §. 128. *liquet*) quod tamen fieri ſupponitur in ſtatu conjunctionis. Hic ipſe error novam fallaciam generavit apud nonnullos ſcriptores; nam priore paralogiſmo decepti cenſent, Vectem gravitate donatum (v.g. DA *in Fig.* 20. *Tab.* I.) cum is Hypomochlio C imponitur, retinere adhuc gravitatem totam æquivalenter collectam in priore puncto, v.g. G, quod falſum; cum experimento probari poſſit, Vecte AD ſupra fulcrum C poſito, ad punctum G filo Verticali ſuſtentandum (*prout Scholion* II. *Prop. IV. monet*) non requiri Potentiam æqualem toti Vectis gravitati, ſed ſolum parti DC.

Poſſem hinc digredi ad impugnandum Carteſii fundamentum, cui ſuam ille Staticen ſuperſtruit; ad convellendum item Varignonii fundamentum vi Compoſitæ innixum, nam aſſumit, idem punctum agi a duplici vi impreſſa, quarum utraque integra maneat, cum tamen poſt obliquum illapſum una alterius vim ſecundum

partem enervet. Verum ne hæc & alia ſimilia longius Tab.III. perſequar, prohibet præſtituta mihi brevitas.

CAPUT V.

De Motu gravium.

ARTICULUS I.

De Motu gravium libero.

§. 130. DEFINITIO. *Motus æquabilis* eſt is, quo Corpus æqualibus ſucceſſivis temporibus æqualia percurrit ſpatia. *Motus uniformiter* ſeu *æquabiliter acceleratus* dicitur ille, qui æqualibus ſucceſſivis temporibus recipit æqualia velocitatis incrementa. *Motus uniformiter retardatus* eſt, qui æqualibus temporibus æqualia patitur velocitatis decrementa.

Ut ſi grave in primo temporis minuto moveatur per pedem 1, in 2do minuto per pedes 2, in tertio per 3 &c. Aut viciſſim ſi in primo minuto moveatur per pedes 20, in 2do per 18, in tertio, quarto, 5to &c. per 16, 14, 12 &c. habebitur in primo caſu motus uniformiter acceleratus, in altero motus uniformiter retardatus.

§. 131. COROLLARIUM. In motu igitur uniformiter accelerato creſcit eadem proportione velocitas, qua tempus (*ſi illud ſemper ab initio motûs metiare*).

OBSERVATIONES.

§. 132. I. Gravia libere demiſſa cadunt motu aliquo accelerato.

II. Gravia quo altius cadunt, eo majorem infligunt ictum, eoque profundius penetrant in ſubjectum molle pavimentum.

III. Gravia pondere inæqualia (v.g. plumula & nummus aureus) in Vacuo Guerickiano cadunt eadem velocitate.

Tab. III. *Experimentum hoc manifeſte declarat, gravitatis vim æqualem eſſe in ſingulis materiæ particulis æqualibus.*

AXIOMA.

§. 133. Eadem Cauſa neceſſaria, ſubjecto apto applicata nec impedita, ſemper agit quantum poteſt.

§. 134. NOTA. Quoniam ad demonſtrationem ſequentium plurimum intereſt diſtinguere tempora majora a minimis; Temporis partes phyſice parvas (v.g. minuta prima, qualium 60 conficiunt unam horam, vel minuta ſecunda, qualium 60 conficiunt unum minutum primum horarium) vocabimus *inſtantia*. Partes inſtantis hujusmodi ſenſibilis indefinite parvas vocabimus *tempuſcula* vel *momenta*.

Præmitto adhuc Lemma, quod tametſi ex dictis in Arithmetica Cap. V. & Geom. Prop. 30. ſatis jam conſtare debeat, ad ſequentia tamen facilius & clarius intelligenda hic explicatius appono.

LEMMA.

§. 135. *Si* a *ſit ad* c *in Ratione duplicata ipſarum* a, b. *quod ſit, quando* a, b, c, *ſunt tres quantitates continue proportionales* *; *erit prima* a *ad tertiam* c, *uti Quadratum de* a *ad Quadratum de* b. *i.e.* $a : c :: aa : bb$.

* Arithm. §. 86.

a .	b .	c
∴	∴	
3 .	9 .	27

DEMONSTR. Si Rationis $a : c$ utrumque terminum multiplices per idem a, erit $a : c :: aa : ac$. Atqui, ob $a : b :: b : c$, eſt $ac = bb$: ergo & $a : c :: aa : bb$. *Q. e. d.* *Viciſſim*, ſi ſit a ad c ut Quadrata $aa : bb$; erit a ad c in Ratione duplicata Radicum a, b. Nam ob $a : c :: aa : bb$, æqualia ſunt abb, aac, & iſtorum tanquam æquemultiplorum ſimpla bb, ac. Atqui propter poſteriorum æqualitatem eſt $a : b :: b : c$, habetque tunc (ob tres continue proportionales a, b, c) a ad c Rationem duplicatam Rationis $a : b$. Ergo. COROLLARIUM. Hinc etiam ſi ſit m ad n in Ratione ſubduplicata Quadratorum aa, bb, erunt etiam m & n uti Radices quadratæ

ipſorum aa, bb. Nam ſi concipias Radices a; b, & tertiam continue proportionalem c, eſt a ad b in Ratione ſubduplicata Quadratorum aa, bb, atque ut Radices quadratæ ipſorum. Sed etiam m & n ſupponuntur eſſe ut a ad b: ergo & m & n ſunt in dato Caſu ut Radices quadratorum aa, bb. Tab. III.

PROPOSITIO XXVI.

§. 136. *Gravia ſibi libere permiſſa, in diſtantia non valde magna a ſuperficie terræ* ✻ *cadunt motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATIO. Eſt in gravibus libere deſcendentibus aucta aliqua velocitas auctusque impetus, adeoque ipſum grave impellitur a vi quadam acceleratrice *. Sed iſthæc vis continuo agit (*alias ſi in primo duntaxat tempuſculo ageret, corpus cum impreſſo ſibi primo impetu deinceps æquabiliter laberetur contra atque experimur*) & quia ſimul Cauſa naturalis & neceſſaria eſt, agens quantum poteſt; ipſa quovis temporis momento eadem perdurans, ſimili ratione agit, parique impulſu Corpus urget: adeoque quovis ſucceſſivo momento æqualem addit accelerationis gradum ✻✻. Atqui Corpus quod æqualibus temporum intervallis recipit æquales celeritatis gradus, movetur motu uniformiter accelerato*; ergo taliter movetur Corpus grave libere ſibi permiſſum. *Q. e. d.*

* *Obſerv.* 1. & 2.

* §. 130.

✻ *Quæ hic demonſtrantur, locum habent in hypotheſi manentis ejuſdem virtutis gravitantis. Conceditur autem ab omnibus, eandem eſſe in diſtantiis non valde magnis a terra. In diverſis autem notabilibusque diſtantiis diverſam eſſe, adſtruitur a Newtonianis.*

✻✻ Ita ut, ſi primo momento producat unum celeritatis gradum, ſecundo momento ſecundum, tertio tertium addat.

Tab. III. §. 137. COROLLARIUM I. Spatia, per quæ grave cadit ſucceſſivis tempuſculis, creſcunt in Progreſſione naturali Arithmetica 1. 2. 3. 4. 5. &c. Nam ſpatia creſcunt uti velocitates, hæ autem, ex demonſtratis, creſcunt ſingulis tempuſculis per æquales accelerationis gradus; ergo & ſpatia.

§. 138. COROLLARIUM II. Viciſſim Corpus grave ſurſum verticaliter projectum aſcendet motu uniformiter retardato, eoquod ſingulis tempuſculis maneat eadem gravitas tanquam cauſa neceſſaria, virtuti ſurſum agenti æqua vi reſiſtens.

PROPOSITIO XXVII.

§. 139. I. *Si grave ex quiete libere decidat per temporis inſtantia ſenſibilia æqualia: erunt ſub finem cujusque inſtantis ſpatia ab initio lapſus computata uti Quadrata creſcentis temporis.* II. *Spatia autem ſingulis inſtantibus percurſa erunt ſecundum Progreſſionem hanc Arithmeticam;* 1. 3. 5. 7. 9. &c.

Hoc eſt: ſi grave cadat e. g. per quinque inſtantia (qualia ſunt Minuta ſecunda horaria) peragretque in Minuto primo pedem 1; peragraverit illud ab initio lapſus uſque ad finem Minuti 2*di* pedes 4; & ab initio lapſus usque ad finem Minuti tertii peragraverit pedes 9, ſimiliter usque ad finem Minuti 4*ti* & 5*ti* pedes 16 & 25; cum numeri 1. 4. 9. 16. 25 &c, ſint uti Quadrata numerorum 1. 2. 3. 4. 5 &c, qui poſteriores indicant temporis incrementa. II*do*. Si autem ſpatia accipiantur illa, quæ in quovis Minuto ſeorſim percurruntur; fiet, ut ſi grave primo minuto percurrat pedem 1, idem minuto 2*do* percurrat pedes 3, in tertio 5, in quarto 7. &c. *Confer. Fig.* 46.

DEMONSTRATUR I. Pars. Tab. III.

Concipiatur unumquodque inſtans dividi in æqualem numerum tempuſculorum infinite parvorum & æqualium, v.g. unumquodque Minutum diviſum in tempuſcula 1000000. Igitur ſi quinque illa Minuta vocemus I. II. III. IV, V; erunt ſub finem Minuti I. elapſa tempuſcula 1000000, ſub finem IIdi tempuſcula 2000000, ſub finem IIItii, IVti, Vti elapſa erunt 3000000, 4000000, 5000000. Sed quia Minuti I incrementis (ſcil. tempuſculis 1, 2. 3, 4, 5 &c. usque ad 1000000mum) proportionatur velocitas atque ſpatiorum magnitudo *, erit Summa & collectio omnium tempuſculorum in Progreſſione naturali Arithmetica conſtitutorum, æqualis collectioni omnium ſpatiolorum usque ad finem Minuti I percurſorum. Pariter Summa tempuſculorum ab 1 usque ad 2000000, i.e. usque ad finem Minuti II, æquatur Summæ totidem ſpatiolorum interea percurſorum; & ſic deinceps. Atqui Summæ omnium tempuſculorum ab initio lapſûs usque ad finem Minutorum I, II, III, IV, V, ſunt ſequentes numeri ** A, B, C, D, E.

* *Pr. 26. Cor. 1.*

A. 500000500000
B. 2000001000000
C. 4500001500000
D. 8000002000000
E. 12500002500000

** *Per Arithm. Prop. 35. Ubi præcipitur, ut ad habendam Progreſſionis ſummam, ſumma termini primi & ultimi multiplicata per numerum terminorum, dividatur per 2.*

Tab. III. Hi autem numeri ſe habent uti 1. 4. 9. 16. 25 &c. ❀. Ergo etiam ſe eodem modo habent Summæ ſpatiolorum, i. e. ſpatia, percurſa intra tempora I. I+II. I+II+III. I+II+III+IV. I+II+III+IV+V. ideoque ſpatia iſthæc ſe habent uti Quadrata creſcentium temporum 1. 2. 3. 4. 5. &c. *Q. e. d.* Sive, ut alia phraſi utar, ſpatia ab initio lapſus computata

*§. 135. ſunt in Ratione duplicata * Temporum, Tempora proinde in Ratione ſubduplicata ipſorum ſpatiorum.

DEMONSTRATUR II. Pars.

Quia (*per Part.* 1.) ſpatia ab initio lapſus percurſa temporibus I. I+II. I+II+III. I+II+III+IV. I+II+III+IV+V. ſunt ut 1. 4. 9. 16. 25 &c.
a. b. c. d. e; hinc ſi a ſpatio *b* ſubtrahas ſpatium *a* primo Minuto percurſum, remanebunt ſpatia 3, percurſa Minuto 2do: Et ſi a ſpatio *c* ſubtrahas ſpatium *b*, remanebunt 5, pro Minuto 3tio decurrenda. Pari modo invenies pro Minuto 4to & 5to ſpatia 7 & 9. Ergo &c. *Q. e. d.*

§. 140. Gravis igitur labentis affectiones ſequens Tabella ſic exhibebit. *

* *Vide etiam* Fig. 46.

Tempora.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Spatia ſeparata.	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	15.	17.	19.
Spatia ab initio lapſus.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.

❀ Perſpicue hoc patebit, ſi numeros A, B, C, D, E divides per eundem numerum 5000000; prodibunt enim proportionales hi *a* 1000001. *b* 4000002. *c* 9000003. *d* 16000004. *e* 25000005. qui numeri, neglectâ nullius momenti fractione, ſunt ut 1. 4. 9. 16. 25; evaneſcetque amplius fractio, ſi majorem aſſumas tempuſculorum numerum.

§. 141. Conſentiunt hujus Propoſitionis Theoriæ utcunque experimenta. Nam cum P. Ricciolus S. J. Bononiæ ex Turri Aſinellorum demiſiſſet Globos cretaceos æquales, ſingulos 8 unciarum, obſervavit tempus, quo Globorum unus decidebat per pedes Romanos 10, & cum numeraſſet ſucceſſive quinque hujusce temporis ſpatia, adnotavit lapſus proprietates ſequente Tabella expreſſas. Tab. III.

Tempora.	*Spatia ſeparata.*	*Spatia ab initio lapſus:*
I	10	10.
II	30	40.
III	50	90.
IV	70	160.
V	90	250.

Numeris his ad minores terminos redactis, videbis omnia exacte congruere cum Tabula §. 140. Conſentiunt & obſervationes recentiores in Gallia factæ, ſecundum quas grave intra Minutum unum ſecundum lapſum eſt per 15 pedes, 1 poll. 2 $\frac{1}{18}$ lin. Menſuræ Pariſinæ; in altero Minuto ſecundo per 45 ped. 3 poll. 6 $\frac{1}{2}$ lin.; in tertio per 75 ped. 5 poll. 10 $\frac{5}{18}$ lin. Sed & hæc ſpatia neglecta fractione exigua creſcunt in Progreſſione Arithm. numerorum imparium 1. 3. 5.

Dixi, experimenta utcunque Theoriæ conſentire. Nam Pater De Chales obſervavit, intra unum Semiminutum ſecundum grave lapſum eſſe per pedes 4 & unam pedis quartam, in 2do, tertio, quarto, quinto, ſexto, lapſum eſſe per ped. 12 $\frac{1}{4}$. 18 $\frac{1}{2}$. 25. 30. 33. *Quam differentiam a vera, in Tabula* §. 140. *expreſſa, ipſemet tribuit aëris reſiſtentiæ. Notandum enimvero, nos in demonſtratione abſtrahere ab aëris omnique alio accidente impedimento. Colligit ex eadem hac obſervatione P. De Chales, motum acceleratum propter reſiſtentem aërem aliquando tandem perventurum ad motum æquabilem.*

COROLLARIUM I.

§. 142. Corpori gravi verticaliter ſurſum propulſo inverſim evenient eædem proprietates; ſcil. ſi aſcenſu per 5. Minuta duraturo, aſcendat primo minuto per pedes 9, conti-

Tab. III. nuabit aſcenſum intra minutum alterum per pedes 7, intra tertium per 5, intra quartum per 3, intra quintum per 1. Adeoque tempus, quo grave delabitur, eſt æquale tempori, quo grave conficiet idem ſpatium aſcendendo, ſi incipiat ferri ſurſum eodem impetu, quem acquiſierat in ultimo momento ſui delapſus.

COROLLARIUM II. Practicum.

§. 143. *Cognito ſpatio* (v.g. 15. pedum) *quod grave motu uniformiter accelerato cadens percurrit intra primum tempus* (v.g. intra unum minutum ſecundum) *invenire tempus, quo percurrit aliud ſpatium datum* (v.g. pedum 19615800, quale eſt circiter longitudo Semidiametri in Globo noſtro terraqueo. RESOLUTIO. Quia ſpatia ab initio lapſus percurſa ſunt uti Quadrata temporum, dic: ut ſpatium 15 ad ſpatium 19615800, ita Quadratum temporis 1 ad Quadratum temporis $x = 1307720$. Igitur Radices ex Quadratis extractæ, ſcil. 1 & 1143, dant tempora. Sed 1143 minuta ſec. conficiunt 19 Minuta prima cum 3 minutis ſec.; igitur tanto tempore indiget grave, ut cadat ex ſuperficie Terræ ad hujus Centrum, ex hypotheſi, quod motus acceleratus eodem tenore continuetur.

Viciſſim, cognitâ temporis parte prima (v.g. uno Minuto ſec.) *& aliâ ſextâ, cognitoque ſpatio percurſo in temporis parte prima* (v.g. 15 ped.) *invenire ſpatium percurrendum in temporis parte ſexta*. RESOLUTIO. Quia ſpatia ab initio

lapſus percurſa ſunt uti temporum Quadrata, Tab. III.
1 & 36; fiat, ut 1 : 36 :: 15 : x = 540. Quare eodem modo ſpatia ab initio emenſa usque ad finem temporis præcedentis ſcil. Minuti quinti, quæ ſunt 375. Jam ſubtrahe inventum poſteriorem numerum a priore, ſcil. 375 a 540; remanebit pro inſtanti ſexto ſpatium 165 pedum. *Vel*, * Dic, ut 1 : 11 :: 15 : * §. 140.
x = 165.

SCHOLION
inſigne.

§. 144. Proprietates Corporis gravis cadentis, explicatæ in Propoſitione hac & præcedente, poſſunt ſub Schemate Figuræ Geometricæ in hunc fere modum exponi. In Triangulo Rectangulo ABC (*Fig.* 45) Linea AB repræſentet tempus ſenſibile; ac proinde ſicut tempus, ita linea hæc concipiatur dividi in partes infinite parvas *Ad*, *de*, *ef*, *fg* &c, ducanturque juxta Methodum Cavallerianam ex quovis puncto elementari transverſæ lineæ cum Baſi parallelæ, quæ ipſæ transverſæ haberi poſſunt pro totidem Rectangulis altitudinem infinite parvam habentibus, cujusmodi aliqua craſſe delineata exhibentur per parallelogrammula *dt*, *eu*, *fx*, *gy* &c. Erunt iſtæ transverſæ ſicut ipſæ *Ad*, *Ae*, *Af*, *Ag* &c. i. e. ſicut temporum incrementa. Sed ſicut ſunt hæc temporum incrementa, ita ſunt in motu uniformiter accelerato velocitates atque exinde ſpatia *: ergo transverſæ illæ recte * *Pr.* 26. repræſentant tum incrementa velocitatum, tum ſpatia *Cor.* 1.
quovis congruente momento percurſa.

§. 145. *Secundo*. Cum lineæ transverſæ repræſentantes ſpatia & implentes ipſum Triangulum ABC, componant hujus Aream; hinc ſi ducas rectam aliquam (v.g. *fy*) Baſi parallelam, exurgent duo Triangula ſimilia *Afy* & ABC, quorum Areæ repræſentant ſpatia elapſa intra tempora *Af*, & AB; ſed hæc Triangula ſunt uti Quadrata rectarum *Af* & AB (*per Geom. Prop.* 30. *Co-*

Tab. III. *roll.* 5.); igitur & ſpatia ab initio lapſus percurſa temporibus ſenſibilibus Af, AB, ſunt uti Quadrata horum temporum. Quare ſi inſtantia ſenſibilia repræſententur per ipſas Ad, Ae, Af, Ag &c. quæ ſint ut 1. 2. 3. 4 &c, erunt ſpatia his temporibus percurſa, uti Quadrata iſtorum temporum. Quod etiam verum eſt, tametſi tempora iſta non creſcant ut 1. 2. 3. &c. ſed quomodocunque aliter, *vi Prop.* 30. *in Geometr.*

§. 146. *Tertio*. Quodſi itaque inſtantium ſenſibilium incrementa ſint ut 1. 2. 3. 4. 5, ac proinde ſpatia his temporibus percurſa ſint ut 1. 4. 9. 16. 25 &c.; erunt (*prout ſupra oſtenſum fuit*) ſpatia ſeparata ut 1. 3. 5. 7. 9 &c.

§. 147. *Quarto*. Quia velocitates acquiſitæ in ultimo momento Temporum Ae, AB, ſunt uti eo, BC, ſive ut ipſæ Ae, AB, hæ autem ſunt in Ratione ſubduplicata ſpatiorum: erunt etiam velocitates illæ in Ratione ſubduplicata ſpatiorum, ſive ut Radices quadratæ ſpatiorum.

§. 148. *Quinto*. Si Corpus tempore ſenſibili Ad fuerit delapſum motu uniformiter accelerato, & eo velocitatis gradu, quem in ultimo momento in d acquiſivit, pergat deinceps motu æquabili ferri; movebitur deinceps iſtud intra idem tempus Ad per ſpatium prioris duplum. Nam dum motu accelerato delabitur, decurrit ſpatium repræſentatum Areâ Triangulari Ado, in quo recta do repræſentat tum ultimum ejus velocitatis gradum, tum ſpatium ultimo momento percurſum. Atqui ſi deinceps velocitate do, vel æquali At feratur æquabiliter per tempus Ad, tranſverſæ æquales ipſi At implent & componunt Rectangulum dt, duplum Trianguli Ado: ergo ſpatium æquabiliter dicto modo percurſum eſt duplum prioris. *Q. e. d.* Ex hoc fundamento quidam probant, gravia labi per ſpatia, quæ ſint ut 1. 3. 5. 7 &c. Nam dum grave, inquiunt, cadit primo minuto per ſpatium unius pedis, altero minuto caderet per duos pedes, ſi pergeret ſola velocitate ſub finem primi minuti acquiſita; at quia ob vim æquabiliter acceleratricem acceſſit novus impetus æqualis ei, quem in primo minuto ſuſceperat, vi hujus movebitur adhuc per unum pedem atque adeo

univer-

univerſim per pedes tres: & ſic porro. Ac recte quidem hoc ſe ratiocinium habebit, ſi de temporibus ſenſibilibus ſermo ſit; quodſi vero illam progreſſionem per ſpatia 1. 3. 5. 7 &c. de ſpatiis etiam inſenſibilibus aſſerant, aſſertio hæc omni fundamento deſtituetur, ac naturæ ipſi repugnabit, quæ minime per ſaltus, ſed per continuos gradus amat progredi. Tab. III.

DICES *contra hunc argumentandi modum in hoc Scholio adhibitum:* Si primam lineam transverſam infinite parvam conſtituas Rectangulum *dt*, & ſecundam Rectangulum *en* &c. & ſic porro; uti pene infinitæ lineæ in Triangulo A B C exiſtunt, ita infiniti pene exceſſus erunt, quales ſunt parvula Triangula A *to*, *ono* &c. Sed infiniti exceſſus poſſunt efficere notabilem quantitatem ſupra veram: ergo tale peccatum occurret in Triangulo A B C. *Reſpondeo: Diſtinguo minorem.* Infiniti exceſſus valent efficere quantitatem notabilem ſupra veram, ſi ſimul ſumpti excedant notabiliter partem unam infinite parvam C. Si non excedant N. At omnes exceſſus ſimul ſumpti nequidem conſtituunt ultimum Rectangulum B C, quod ipſum eſt pars infinite parva reſpectu totius A B C: igitur exceſſus etiam ſimul ſumpti ſunt nullius conſiderationis. Hinc etiam ſi motum primo tempuſculo factum conſideres ut æquabilem, & motum ſecundi tempuſculi conſideres ut habentem reſpectu primi unum accelerationis gradum, & motum tertii tempuſculi ut ſecundum gradum, quarti ut tertium &c. adhuc ſubſiſtent ſuperiores motus accelerati proprietates.

§. 149. SCHOLION. Non piget hic diſcere, quanta foret Corporum in cadendo ſegnities, niſi naturæ Author voluiſſet ea motu accelerato ferri. Nam cum monſtrante experientia grave acceleratum cadat intra unum Minutum ſecundum per ſpatium 15 pedum; ſi Minutum hoc dividatur in tempuſcula 1000000, cadatque grave tempuſculo primo per ſpatiolum unum, quod voco *s*, peragraverit ſub finem lapſus ſpatiola 500000500000. At ſi idem grave ſupponas ferri motu æquabili, illudque tempuſculo primo moveri per idem ſpatiolum *s*, percurret illud tempuſculo 2do rurſus unum *s*, in tertio denuo unum, & ſic porro, unde demum ſub finem Minuti ſecundi i. e. poſt 1000000 tempuſcula peragraverit totidem ſpatiola *s*. Sed ſpatiola 1000000 motu æquabili percurſa ſunt ad ſpatiola 500000500000 intra idem tempus motu accelerato percurſa, ut 1 ad 500000: ergo grave motu æquabili intra 1. Min. ſec. peragravit duntaxat partem quingenties milleſimam ſpatii 15 pedum, atque ut ad finem hujuſce ſpatii pertingat, indiget univerſim Minutis ſec. 500000, id eſt, diebus 5 & horis 18 &c. Vide P. De Chales L. II. Static. Prop. 22. qui cum unum Minutum ſec. diviſiſſet in minuta decima, 16796160000000, invenit, grave per ſpatium 16 pedum & dimidii motu æquabili lapſurum annis 5 322 381.

Tab. III.

ARTICULUS II.
De Corpore gravi labente ſuper Planum Inclinatum, & de Pendulis.

OBSERVATIONES.

§. 150. I. Gravia deſcendunt tardius per Planum Inclinatum AC, quam per verticalem ac Perpendicularem AB. Fig. 54.

II. Gravia deſcendunt per Planum Inclinatum motu aliquo accelerato.

PROPOSITIO XXVIII.

§. 151. *Gravia deſcendunt per Planum Inclinatum motu uniformiter accelerato.*

DEMONSTRATUR uti Propoſitio 26. Nam vis acceleratrix (quæ hîc exiſtit per Obſerv. 2.) tanquam Cauſa neceſſaria & eodem modo applicata, quovis temporis momento æqualia ſemper velocitatis incrementa ſuperaddet, non ſecus ac in gravibus verticaliter cadentibus. Ergo.

§. 152. COROLLARIUM. Deſcenſum ergo gravium per Planum Inclinatum comitantur eædem proprietates, quæ deſcenſum liberum. Scilicet I^mo. Velocitates ſingulis momentis acquiſitæ ſunt uti tempuſculorum incrementa: nempe primo tempuſculo decurritur unum ſpatiolum, 2do duo, tertio tria &c. II^do. Spatia ſenſibilia ab initio motus computata ſunt in Ratione Duplicata Temporum. *Viciſſim* Tempora (& proportionales ipſis velocitates) ſunt in Ratione ſubduplicata, ſive ut Radices quadratæ, ſpatiorum. Quare ſi decurrantur in

Plano AC * ſpatia AP, AC, erunt Tempora, queis decurruntur, ut Radices Quadratæ iſtorum ſpatiorum. III^tio^. Aſcenſus Corporis gravis per Planum inclinatum eſt motus uniformiter retardatus. IV^to^. Grave per Planum decurrens, ſub finem lapſus acquirit eam velocitatem & vim, per quam (retroactâ directione) poſſet præciſe aſcendere eodem tempore per idem Planum. Tab. III. * Fig. 54.

Quem porro delectat ſcitu digna Pendulorum cognitio, ſequentes Propoſitiones perdiſcat, inter quas principalis eſt trigeſima tertia, ad quam reliquæ ordinantur.

PROPOSITIO XXIX.

§ 153. *Velocitas, quam grave acquirit poſt decurſam verticalem* AB ✱, *eſt ad velocitatem eodem tempore acquiſitam ſuper Plano Inclinato, uti Plani longitudo* AC, *ad Altitudinem* AB; *ex ſuppoſito, quod utrobique incipiat cadere ex quiete & puncto* A. Fig. 54

DEMONSTRATUR. Ponamus idem tempus utrinque diviſum in æqualia & æque multa tempuſcula. Jam vero velocitates initiales quæ fiunt utrimque in primo tempuſculo, hîc per verticalem illic ſuper Planum, ſunt uti Vires ✱✱ a quibus procedunt, nempe ut gravitas

✱ Per velocitatem acquiſitam decurſo aliquo ſpatio, v g. lineâ AB, intelligitur ille velocitatis gradus, quem grave acquirit ultimo momento, quo ad finem illius lineæ venit.

✱✱ Ideo enim in Plano eſt tardior motus, quia Corporis momentum in Plano minuitur; & quidem ut obſervatio demonſtrat, ſi dentur duo ejusd. Altitudinis plana, grave deſcendit tardius in Plano longiore in quo minus momentum habet, quam in breviore in quo majus habet: igitur momentum aut vis decreſcens eſt menſura tardioris velocitatis; ac propterea velocitates ſunt utrimque ut

Tab. III. * Pr. 21. Cor. 1.

Abſoluta ad Reſpectivam, i. e. ut Plani longitudo ad altitudinem *. Atqui velocitatibus initialibus proportionantur ſubſequentes reliquæ ✻, adeoque & velocitates ultimo momento utrimque acquiſitæ. Ergo & hæ postremæ ſunt ad ſe ut Plani longitudo ad altitudinem. *Q. e. d.*

§. 154. COROLLARIUM I. Etiam ſpatia a gravi primum verticaliter, deinde ſuper Planum eodem tempore decurſa ſunt ad ſeinvicem, uti Plani longitudo ad ejus altitudinem. Sequitur id ex lapſu uniformiter & proportionaliter continuato: ſic dum grave in verticali decurrit, 1 S, decurret in Plano 1 *s*; ſi hic decurrat 2 S, 3 S, 100 S, decurret illic 2 *s*, 3 *s*, 100 *s* &c. Sed 100 S ſunt ad 100 *s*, ac denique Totum ad totum, uti 1 S ad 1 *s*; igitur ſpatia etiam tota ſunt uti initialia, proinde ut vires, atque hinc ut AC : AB.

§. 155. COROLLARIUM II. Grave igitur intra idem tempus, quo decurrit verticalem AB, nondum percurrit totum Planum AC, ſed hujus duntaxat partem. *Hæc pars qualis quantave ſit reſpectu totius, in ſequentibus mox docebitur.*

---

vires, quarum una (nempe *Abſoluta*) integra eſt, altera (*Reſpectiva*) imminuta eſt. Poſſet hoc ipſum aliter demonſtrari ex Prop. 21, ex §. 132. obſervatione 3, & ex §. 125.

✻ Nempe ſi primo tempuſculo cadat grave in verticali per ſpatiolum S, & ſuper Planum, propter tardiorem motum, per minus ſpatiolum *s*; cadet ſecundo tempuſculo hic per 2 S, illic per 2 *s*, tertio hic per 3 S, illic per 3 *s*, & ſic porro. Sunt autem 1 S : 1 *s* : : 2 S : 2 *s* : : 3 S : 3 *s*. &c. denique tota ut prima.

PROPOSITIO XXX.

Tab. III.

§. 156. *Si ex Altitudinis verticalis* AB *puncto ultimo* B *ducatur ad Planum perpendicularis* BP; *dabit Plani pars* AP *ſpatium, quod decurritur intra idem tempus, quo grave cadit libere per verticalem* AB; *ex hypotheſi, quod idem grave incipiat utrobique moveri ex eodem puncto* A.

Demonstr. Spatia duorum lapſuum, ſcil. unius liberi, & alterius ſuper Planum, ſunt ad ſeinvicem uti CA ad AB *. Atqui ſpatium lapſus liberi, quod eſt eadem AB, ſe habet ad AP uti CA ad AB. (Nam ob Triangula ſimilia BCA, BPA *, eſt CA:AB :: AB : AP). Ergo. * Pr. 29. Cor. 1. * Geom. Pr. 57.

Notabis, Planum CA, verticalem AB, Plani partem AP, eſſe tres quantitates continue proportionales, & AB quidem Mediam.

§. 157. Corollarium I.* Ductis in Circulo Chordis AM, AN, AR, item MD, ND, RD &c. percurret grave æquali tempore ſingulas iſtas Chordas; & quidem eodem illas tempore percurret, quo caderet per Diametrum verticalem AD. Nam ſi Chordas AM, AN, AR &c. producas usque ad horizontalem DL, oriuntur diverſa Plana inclinata, ad quæ perpendiculares ſunt Chordæ MD, ND, RD *: ergo hæ decurruntur eodem tempore, quo verticalis AD. Similiter ſi Chordas inferiores MD, ND, RD transferas in oppoſitum Semicirculum ex A verſus *r*, *m*, *n*, concipiasque duci lineas *r*D, *m*D, *n*D; erunt illæ eodem modo inclinatæ ad Horizon- * Fig. 55. * Geom. Pr. 20. Cor. 1.

tem, quo oppoſitæ, ipſisque æquales, (*ut ex æqualite Triangulorum* ADm, ADM; ADN, ADn &c. *& Geom. Propp.* 2. *&* 20. *Cor.* 1. & 3. *liquet*). Ergo & hæ eodem tempore decurruntur, quo Diameter.

§. 158. COROLLARIUM II. Velocitas acquiſita in Verticali AB habet ſe ad velocitatem eodem tempore acquiſitam in Plano, uti
Pr. 29. AC ad AB (Fig. 54), proinde etiam ut AB ad AP, i. e. habent ſe ut ipſa ſpatia.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 54. §. 159. *Tempus* T, *quo percurritur totum Planum* AC, *eſt ad tempus* t, *quo percurritur Perpendicularis* AB, *uti* AC *ad* AB.

DEMONSTRATUR. Ducta Perpendiculari BP eſt tempus *t*, quo percurritur AB, æquale
Pr. 30. illi, quo decurritur ipſa AP. Jam vero Tempora T & *t* queis decurruntur ſpatia AC & AP, ſunt in Ratione ſubduplicata iſtorum
Pr. 28. Cor. n. 2. ſpatiorum, id eſt (ob tres continue proportionales AC, AB, AP) uti AC : AB; ergo etiam eſt T : *t* : : AC : AB. *Q. e. d.*

COROLLARIUM. Tempora lapſuum per diverſa Plana eandem altitudinem habentia ſunt uti horum longitudines.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 54. §. 160. *Corporis gravis Celeritas* C *acquiſita ſub finem lapſus verticalis* AB, *eſt æqualis celeritati* c *acquiſitæ ſub finem lapſus per Planum inclinatum* AC.

DEMONSTRATUR. Celeritates C & *c* ha-

bent eandem Rationem ad quantitatem aliquam tertiam. Ergo ſunt æquales. *Probo Antecedens*. Celeritas C acquiſita in Perpendiculari AB habet ſe ad velocitatem eodem tempore in Plani parte AP acquiſitam (quam vocabo V) uti AC ad AB *, vel ut AB ad AP (ob tres continue proportionales AC, AB, AP) *Breviter*, C : V :: AB : AP. *Secundo*. Celeritas *c* acquiſita poſt decurſum totum Planum habet ſe ad velocitatem V in Ratione ſubduplicata ipſorum ſpatiorum AC, AP *, hoc eſt, ut AB ad AP. Ergo eſt *c* : V :: AB : AP. Sed eſt etiam * C : V :: AB : AP. Ergo C & *c* habentes eandem Rationem ad tertiam V, ſunt æquales. *Q. e. d.*

Tab. III.

* Pr. 29.

* Pr. 28. Cor. n. 2.

* ex demonſtratis

§. 161. COROLLARIUM I. Celeritates itaque, quas idem Corpus acquiſivit per diverſa, ejuſdem tamen altitudinis Plana, ſunt inter ſe æquales, quia omnes æquantur uni celeritati acquiſitæ per verticalem. Quamvis tempora, queis acquiruntur, ſint inæqualia, *ut ex Prop.* 31. *liquet*.

§. 162. COROLLARIUM II. Si grave cadit per plura Plana ſed contigua (v.g. AB, BC, CD); habebit, ſub finem lapſus per illa, in D celeritatem æqualem illi, quam acquiſiviſſet cadendo verticaliter ex R in D; ſupponendo *primo*, puncta A & R eſſe in eadem horizontali RAN, 2do angulum & flexum ad B aut C non impedire motum, ſed tantum mutare ipſius directionem. Nam dum ex A pervenit in B, acquiſivit celeritatem, quam

Fig. 56.

Tab. III. acquiſiviſſet cadendo per verticalem, pB, vel per obliquam MB *: unde ſi cum hac celeritate porro pergat moveri ex B in C; habebit in C celeritatem talem, qualem acquiſiviſſet per Planum MC vel verticalem qC. Similiter in D acquirit celeritatem parem illi, quam acquiſiviſſet per Planum ND vel verticalem RD: & ſic deinceps. *Viciſſim*, ſtantibus ſuperioribus duobus ſuppoſitis, grave delapſum ex A per B & C usque ad D, acquiſivit vires & velocitatem, queis præciſe poſſet intra idem tempus redire per eadem Plana contigua DC, CB, BA, vel per verticalem DR *. Unde porro

* Cor. 1.

* Pr. 58. Cor. n. 4.

Fig. 58. §. 163. COROLLARIUM III. Si grave decurrat Circuli arcum rD, qui ſane conſiderari poteſt inſtar plurimorum Planorum contignorum infinite parvorum, in quorum decurſu remoram nullam patiatur; fiet (ductâ prius rP, perpendiculari ad Diametrum verticalem DO) ut in D acquirat velocitatem eandem, quam acquiſiviſſet cadendo per verticalem, ſeu Sinum verſum, PD. Præterea poſt emenſum arcum rD, motu continuato aſcenderet per arcum DR = Dr, atque hinc ex R (conſumptis ibi viribus) relabendo moveretur usque in r, & ſic porro. Hinc ſi grave ſuſpendatur ex tenui filo gravitatis experte & ex clavo C, atque ex quiete verticali adducatur in R, ibidemque ſibi permittatur; ſuſtentabitur ipſum grave æque ac ſuſtentaretur a

planis infinite parvis * in arcu RD. Quare Pendulum tale movebitur per arcus æquales RD, D*r*; & redibit per eoſdem. Itum unum per arcum RD*r*, vel reditum unum per RD*r*, vocamus *oſcillationem* vel *vibrationem*. Tab. III.

Facta ergo una oſcillatione fierent æquales omnes ſubſequentes tam quoad ſpatium quam quoad tempus *, idque ſine fine, ut adeo Pendulum tale præberet nobis Mobile perpetuum, niſi frictio ad clavum & aëris reniſus motum continuo infringerent. * Cor. 2.

PROPOSITIO XXXIII.

§. 164. *Si dentur duo Plana contigua* AB, BG, *& alia duo contigua* $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, *proportionalia primis & ad Horizontem eodem modo inclinata; erit tempus, quo grave percurrit Plana* $AB + BG$, *ad tempus quo idem decurrit altera* $\alpha\beta + \beta\gamma$, *uti ſunt Radices quadratæ horum Planorum vel Spatiorum.* Fig. 57.

Radices quadratas dictorum Planorum vel aliorum Spatiorum exprimamus per $r(AB + BG)$, $r(\alpha\beta + \beta\gamma)$, item per $r\,AB$, $r\,\alpha\beta$; ita ut nota *r* exprimat Radicem quadratam illius quantitatis, cui præfigitur. *Secundo*, Tempus impendendum ad decurrenda iſthæc latera ſignabimus per litteram *t* ipſis præfixam. Demonſtrandum itaque eſt, ſi ſit $AB : BG :: \alpha\beta : \beta\gamma$, eſſe $t\,AB + BG : t\,\alpha\beta + \beta\gamma :: r(AB + BG) : r(\alpha\beta + \beta\gamma$.

DEMONSTRATIO. I^mo^. Producantur Plana GB, $\gamma\beta$ usque ad Horizontales AZ, $\alpha\zeta$; erit propter ſimilem ad Horizontem inclinatio-

* De quo ne dubitare poſſis, concipe filum ſuſtentans inſtar Radii, ad quem ſit Planum decurrendum inſtar Tangentis perpendiculare; tunc autem filum eadem ratione ſuſtentabit grave, quod Planum *b* A (*Figura* 30. *Tab.* II.) directione *bc* etiam ad Planum perpendiculari ſuſtentaret idem grave. Confer §. 117.

Tab. III. nem Angulus A ≍ α, & Z ≍ ζ; proinde ΔΔ AZB, αζβ ſimilia: unde nunc plures inſtitui poſſunt Proportiones; eſt enim BG:βγ::AB: αβ * ::ZB:ζβ, ergo & ZB:ζβ::BG:βγ, & *alternando* ac *componendo* ZB ✝ BG : BG:: ζβ ✝ βγ:βγ, ſive ZG:BG::ζγ:βγ, rurſusque *alternando* BG :βγ : : ZG:ζγ; adeoque Ratio BG : βγ facit æquales inter ſe tres ſequentes laterum Rationes, AB:αβ, ZB:ζβ, ZG : ζγ, quibus & accenſe hanc quartam AB ✝ BG:αβ ✝ βγ (Nam cum ſit AB:BG:: αβ : βγ, erit *componendo* AB ✝ BG : BG:: αβ ✝ βγ : βγ, & *alternando* AB ✝ BG : αβ ✝ βγ :: BG:βγ. Ergo.)

* hypoth.

II^do. Quare ſicut iſta latera, ita etiam eorum Radices quadratæ ſervant unam eandemque Rationem inter ſe (*ut ſi in quatuor illis Rationibus unumquodque latus Antecedens ſit ad ſuum Conſequens*, e. g. AB *ad* αβ *uti* 9 *ad* 4; *erit uniuscujusque Antecedentis Radix ad Radicem Conſequentis ut* 3 *ad* 2). Sed uti ſunt Radices laterum ſeu ſpatiorum AB & αβ, ZB & ζβ, ZG & ζγ, ita ſunt etiam tempora queis decurruntur (*per Prop.* 28. *Cor. n.* 2, *cum quodvis latus minus poſſit hîc ob eandem ad Horizontem inclinationem conſiderari tanquam portio majoris homologi, in quod ſit translatum*, e. g. αβ *ut pars lateris* AB). Igitur & æquales ſunt Rationes iſtæ, *t* AB:*t* αβ, *t* ZB : *t* ζβ, *t* ZG : *t* ζγ. Quare ſi a Totis *t* ZG , *t* ζγ , auferas partes ſimiles *t* ZB, *t* ζβ, remanent *t* BG, *t* βγ, habentes eandem Rationem, quam habent tum

Tota tum Totis proportionalia, qualia ſunt tAB, $t\alpha\beta$: unde valebit $tBG : t\beta\gamma :: tAB : t\alpha\beta$. Tab. III.

III^tio. Cum poſt decurſam ZB ſit eadem acquiſita celeritas, acſi grave cecidiſſet per AB; ſimiliter poſt decurſam $\zeta\beta$ eadem celeritas ſit in β, ac ſi grave cecidiſſet per $\alpha\beta$*, igitur etiam poſt emenſa AB & $\alpha\beta$ eadem celeritate atque eodem tempore percurrentur ipſa BG & $\beta\gamma$, quo decurrerentur poſt emenſa ZB, $\zeta\beta$. Atqui (*ex Num.* II. *ſub finem*) poſt emenſa ZB, $\zeta\beta$, Tempora percurrendorum reſiduorum BG & $\beta\gamma$ ſunt uti $tAB : t\alpha\beta$; ergo etiam poſt emenſa AB, $\alpha\beta$, erit $tBG : t\beta\gamma :: tAB : t\alpha\beta$. Et poſt factam *alternationem* & *commutationem* erit *componendo* $tAB + tBG : tBG :: t\alpha\beta + t\beta\gamma : t\beta\gamma$. & rurſus *alternando* $tAB + tBG : t\alpha\beta + t\beta\gamma :: tBG : t\beta\gamma$ vel $:: tAB : t\alpha\beta$. Demum quia eſt $tAB : t\alpha\beta :: rAB : r\alpha\beta$*, & ** $rAB : r\alpha\beta :: r(AB + BG) : r(\alpha\beta + \beta\gamma)$; erit etiam (ſubſtitutis æqualibus Rationibus) $tAB + tBG : t\alpha\beta + t\beta\gamma :: r(AB + BG) : r(\alpha\beta + \beta\gamma)$. *Q. e. d.* Quod vero de duobus utrinque lateribus fuit demonſtratum, valet de quotcunque planis numero utrinque æqualibus, ſimilibus, ſimiliterque inclinatis.

* Pr. 32. Cor. 1.

* Pr. 28. Cor

** ut dictum initio Num. 2.

§. 165. COROLLARIUM I. Similes arcus duorum Circulorum inæqualium, at eodem modo ad Horizontem inclinatorum, poſſunt conſiderari ut compoſiti ex totidem Planis plurimis ſimilibus & ſimiliter inclinatis.

Tab. III. Unde mobile decurret hos arcus temporibus, quæ ſint ut Radices Quadratæ arcuum ſimilium, vel Peripheriarum, vel Diametrorum, vel Radiorum. Atque hinc Pendula duo inæqualia percurrent arcus ſimiles intra tempora, quæ ſint ut Radices quadratæ ſuarum longitudinum ceu Radiorum.

§. 166. COROLLARIUM II. Practicum. *Data Penduli longitudine & arcu percurrendo, invenire longitudinem alterius Penduli, quod ſimilem arcum percurrat certo tempore.* E.G. Quando Pendulum longum eſt pedes Geometricos Rhenanos 3° 166″ (conſiderando hic pedem ut unum Integrum) peragit tale Pendulum oſcillationem unam per arcum parvum, v.g. 5 graduum, intra unum Minutum ſecundum; qualisnam erit longitudo illius Penduli, quod intra dimidium Minuti ſecundi percurrat ſimilem arcum 5°? RESOLUTIO. Fiat, ut Tempus ✻ 1″ ad ½″, vel 60‴ ad 30‴, ita Radix quadrata longitudinis 3166, vel (*pro accuratiore calculo*) de 3,1660 0000, quæ eſt 1,7793, ad aliam Radicem quadr. 0,8896, cujus Quadratum 0,7913 8816, vel brevius 7′91 dat longitudinem quæſitam, *per Coroll.* 1.

VEL *Brevius pro Exemplo præſente.* Quia tempora hic ſunt 2 : 1, debet longitudo 3166 eſſe quadrupla longitudinis quærendæ; igitur quarta pars de 3166, hoc eſt 791 ½ dat longitudinem quæſitam.

VEL. Utere REGULA GENERALI iſthac: uti Quadrata Temporum, ita Pendulorum longitudines. Hinc ſtabit, 3600 : 900 :: 3,166 : 7′91. RATIO, Quia Tempora ſunt uti Radices quadr. Pendulorum; igitur & Quadrata Temporum uti ipſa Pendula.

§. 166. COROLLARIUM III. Practicum. *Dato numero vibrationum, quas Pendulum A notæ longitudinis perficit, invenire longitudinem Penduli X, quod alium*

✻ Nota. *Minuta prima, ſecunda, & tertia horaria, notantur uti Graduum minuta prima, ſecunda &c.*

vibrationum numerum intra idem tempus perficiat. E. G. Pendulum A, longum pedes Geometricos 3, poll. 4. perficit intra horam vibrationes 3666. Quæritur longitudo alicujus Penduli, quod intra horam eandem perficiat vibrationes 3600, ſcil. tot, quot ſunt minuta ſecunda in una hora; ſive quæritur Pendulum, quod intra unum Minutum ſecund. faciat vibrationem unam. Resolutio. Tempus datum, ſcil. horam unam reſolve in minuta valde parva, v.g. in quarta; æquivalebit Hora minutis 12960000'''', quem numerum ſi dividas per datos vibrationum numeros 3666 & 3600; fiet una vibratio Penduli A intra minuta 3535'''', & una vibratio Penduli X intra 3600''''. Cum autem ſint Pendulorum Radices ſicut tempora, fiat ùt 3535'''' ad 3600'''', ita Radix de 3,400000, nempe 1,843 ad aliam Radicem, 1,876, cujus Quadratum 3,519376 dat longitudinem Penduli X, quando una ejus vibratio fit intra 3600'''' vel 1''. Tab. III.

Viciſſim data longitudine duorum Pendulorum A & B, & duratione vibrationis Penduli unius (A), licebit invenire alterius Penduli vibrationis durationem. Eſt nempe duratio vibrationis Penduli A ad alterius B durationem, ut Radix qu. Penduli A ad Radicem qu. Penduli B.

ULTERIOR
EXPLICATIO
De Pendulis eorumque uſu.

Ex præmiſſis fundamentis ſubjungo breviter alias nonnullas Penduli proprietates, quæ legenti ſcripta RR. Phyſicorum lumen afferre poſſunt. Prætereo autem illas, quæ absque Matheſi ſublimiore ægre explicari percipive queunt.

I.

Qualecunque Pondus ſive magnum ſive parvum, ſive unius ſive duarum librarum, appendas Penduli filo; eodem tempore & eadem velocitate per eundem arcum feretur, modo eadem ſemper ſit Penduli longitudo; quæ deſumitur a centro gravitatis corporis appenſi usque ad punctum ſuſpenſionis. Sicut namque in gravibus libere

Tab. III. per verticalem deciduis majus Pondus non producit majorem accelerationem, prout conſtat ex § 132. obſerv. 3; ita nec in Planis inclinatis nec in Pendulis majorem accelerationem generat Ponderis & materiæ major quantitas.

Vera hæc ſunt, ſi abſtrahamus ab impedimentis ex accidente obvenientibus. Ita ſi globus ligneus A & alter plumbeus B, uterque ejusdem magnitudinis ex æqualibus filis oſcillentur, tardius aliquanto ligneus præ plumbeo movebitur, eoquod ille majorem aëris renisum præ altero B experiatur.

II.

Si Pendulum ex catenula dependet, qualia placuere Patri Ricciolo, debet catena exiguam habere Rationem ad pondus Penduli.

III.

Ut Grave in Pendulo tardius moveatur, debet Pendulum fieri longius, ut celerius, brevius. Sequitur ex Propos. 33. Corollariis. Hinc cum tempore æſtivo Pendulum fili ferrei vel virgæ metallicæ calore evadat longius, hyeme contractius, etiam Pendulum hoc pauciores æſtate quam hyeme vibrationes intra idem tempus perficit.

IV.

Fig. 59. Velocitates acquiſitæ per Arcus CB, DB, EB, ſunt æquales illis, quæ acquiruntur per verticales * MB, NB, OB, i. e. per Sinus verſos dictorum arcuum: ſed celeritates acquiſitæ per iſtos Sinus verſos ſunt in Ratione ſubduplicata i. e. ut Radices qu. iſtorummet Sinuum *; ergo etiam velocitates acquiſitæ per arcus. Atqui Sinus verſi arcuum graduum 1°. 2°. 3°. 4°. 5° &c. usque ad 15°, ſi comparentur inter ſe, ſunt proxime ad invicem ut 1. 4. 9. 16. 25 &c. ergo celeritates per iſtos arcus ſunt, ut Radices Sinuum verſorum, i. e. ut 1. 2. 3. 4. 5 &c.

* Pr. 32. Cor. 3.

* Pr. 28. Cor.

Porro Chordæ iſtorum arcuum proxime ſe habent uti ipſimet arcus, nam arcus & Chorda 15 Graduum habent ſe ut 350 : 349. Igitur & velocitates per Chordas iſtas erunt proxime æquales velocitatibus per arcus.

V.

Quamobrem dum Corpori in pendulo deſideramus dare velocitatem duplam, triplam, quadruplam, vel duobus Corporibus certas velocitates in data Ratione v.g. 3 : 5; id fiet ſi pendulum ex quiete adduxeris ad arcum duplum, triplum &c. vel ad tales, qui ſint ùt 3 ad 5. Quæ res multam affert utilitatem ad capienda varia experimenta, præſertim de percuſſione & colliſione Corporum tum durorum aut mollium, tum elaſticorum, quorum affectiones & leges licebit Phyſicis experimentis ſecundum indicatum artificium demonſtrare. Tab. III.

VI.

Alio modo licebit Corporibus pendulis dare velocitates deſideratas, v.g. ùt 1. 2. 3 &c. ſi in Circulo (*Fig.* 55.) ducas ex Diametri Verticalis infimo puncto D Chordas DR, DN, DM &c. quæ ſint ut 1. 2. 3 &c. neque refert, parviſne an majoribus arcubus illæ ſubtendantur; ſemper enim erunt velocitates uti ipſæ hæ Chordæ. Demonſtratio fundatur in Propos. 27. & 32. Cor. 3. Nimirum concipe in Diametrum verticalem ductas eſſe ex R, M, N, perpendiculares, quas vocabimus R*b*, N*c*, M*d* (*lineas haſce & notas, ad confuſionem tollendam in figura omiſſas, tumet nunc adſcribe*). Jam vero velocitas per arcum RD = velocitati per *b*D *; ſed velocitates per *b*D & AD ſunt ad ſe uti Radices qu. ipſorum *b*D & Ad *, i.e. ut RD ad AD (ob tres continue proportionales *b*D, DR, AD); ſimiliter velocitates per arcum ND vel per *c*D, & illa per AD, ſunt ut Radices ipſorum *c*D, AD, i.e. ut ND ad AD: & ſic porro. Itaque cum ſint velocitates per arcus DR, DN, ad velocitatem per Diametrum, ut Chorda DR ad DA, & ut Chorda DN ad eandem DA; ſi Chordas conſideres ut Fractionum Numeratores relatos ad communem Denominatorem DA, erunt illæ inter ſe uti Numeratores *; quamobrem ſi Chorda DR ſit ad alteram DN, ut 1 ad 2, erit etiam velocitas per arcum RD ad velocitatem per arcum ND, ut 1 ad 2. Ex eadem ratione, ſi Chorda ND ſit ad MD, ùt 2 : 3, erunt etiam tales ipſæ velocitates per arcus ND & MD.

* *Pr.* 32. *Cor.* 3.
* *Pr.* 27.
* *Arithm.* §. 52.

VII.

Tab. III. Fig. 59. Sequitur ex Num. IV, Corpus ea celeritate, quam cadendo ex certa parvi Sinus verſi altitudine (v.g. MB) acquiſivit, poſſe & redire per MB, & ad eandem altitudinem aſcendere per arcum BC: ſed tempora tunc non ſunt æqualia; diutius namque per arcum fertur, quam per MB, *per Prop. 31. & Num. IV.*

VIII.

Fig. 59. Penduli ſemivibrationes per diverſos arcus (v.g. BC, BD &c.) quorum Chordæ ſunt proxime ipſiſmet arcubus æquales (*de quibus in Num. IV.*) ſunt quoad ſenſum Iſochronæ. Patet tum ab experientia, tum ex Prop. 30. Cor. 1. & Num. IV. Nam Tempora decurrendarum chordarum ſunt æqualia *; ſed his temporibus proxime coæquantur tempora decurrendorum arcuum *. Ergo. Igitur & totæ vibrationes, utpote compoſitæ ex deſcenſu & aſcenſu æqualibus **, ſunt iſochronæ. Hinc Pendula per parvos arcus mota poſſunt adhiberi dimetiendis parvis temporum partibus; quam praxin noſter P. Ricciolus ad Aſtronomicas obſervationes tranſtulit, cum uſus Horologiorum pendulis inſtructorum nondum innotuiſſet.

* *Pr. 30. Cor. 1.*
* *Num. IV.*
** *Pr. 32. Cor. 2.*

Quomodo hæc Pendula pro praxi aptanda ſint, optime docet P. de Lanis S. J. *Tom. I. Magiſter. nat. & art.*

DIXI, tempora decurrendarum chordarum eſſe *proxime* & quoad ſenſum æqualia temporibus decurrendorum arcuum: revera autem eſt aliqua inter illa inæqualitas; quæ qualis quantaque ſit, ad ſublimiorem Matheſin pertinet examinare. Conſuli poſſunt Eulerus in Mechan. Tom. II. Hermanni in Diſſert. in Comment. Acad. Petropol. T. II. Sufficit hîc notaſſe, tempus per Chordam longius eſſe tempore deſcenſus per arcum: cujus rei demonſtrationem jam dedit Galilæus, & ex hoc P. De Chales Statices L. III. Prop. 34. Cæterum curvam lineam talem, in qua quævis vibrationes eſſent perfecte iſochronæ, excogitavit ingenioſiſſimus Hugenius, illamque vocant Cycloidem: hujus naturam exponunt Hugenius, P. Boſchowich S. J., Deidier, Wolffius aliique: quomodo deſcriben-

ſcribendæ, facilem praxin tradit Graveſandus in Elem. Phyſ. Math. L. I. C. 20. Cycloïs iſthæc Horologiis Pendulo inſtructis ſeu oſcillatoriis fuit ab Hugenio primum applicata, non ſine magno Aſtronomiæ & temporis exacte metiendi bono. Hodie tamen paſſim ab artificibus Horologia eadem abſque pendulo cycloidali fabricantur, cum Pondus appenſum faciunt per parvos circuli arcus mobile: parvus autem circuli arcus haud notabiliter differt ab inferiore parvo cycloidis arcu.

IX.

Dum vero audis Pendulum Horologiis applicatum, noli hic concipere grave ex filo pendens, quale ſupra deſcripſimus, & quod vocatur *Pendulum ſimplex*: nam quæ Horologiis aptantur, compoſita ſunt. Eſt autem *Pendulum compoſitum* vel virga rigida & gravis, vel virga eadem cum annexo adhuc alſo Pondere, vel cum pluribus annexis ponderibus certo intervallo inter ſe diſtantibus. Singularis ſcientiæ eſt, determinare in Pendulo compoſito *Centrum oſcillationis*, i.e. punctum tale, in quod ſi colligeretur tota gravitas tum virgæ tum ponderum annexorum (quo pacto pendulum Compoſitum ad Simplex revocatur), ſingulæ oſcillationes eodem tempore conficerentur, quo in ipſo Compoſito. Centrum hoc nequaquam coincidit cum centro gravitatis, id enim prohibent diverſæ diverſorum ponderum celeritates, quæ neutiquam proportionantur ponderibus aut diſtantiis. Regulæ pro Pendulo Compoſito hæ ſtatuuntur. I. Quando virga recta æqualis ubique craſſitiei uno ſui extremo ſuſpenditur; Centrum oſcillationis diſtat a centro ſuſpenſionis duabus partibus tertiis longitudinis virgæ. II. Quando plura in virga corpora ſunt annexa, v.g. A, B, C (*Fig.* 60.) quorum Centrum gravitatis ſit in punctis A, B, C; tunc ſi ſingula Corporum pondera multiplicentur per quadrata ſuarum diſtantiarum a Centro ſuſpenſionis; & aggregatum horum productorum dividatur per Summam productorum ſingulorum ponderum multiplicatorum per ſuas diſtantias a Centro ſuſpenſionis: quotus dabit diſtantiam Centri oſcillationis a puncto ſuſpenſionis.

Tab. III.

X.

Pendulis hiſce Compoſitis utuntur nonnulli Philoſophi ad demonſtrandum, vires Corporum vivas eſſe ut Quadrata velocitatum; vide Graveſandum *Elem. Phyſ. Math. L. I.* Atenim aliud argumentum prioribus e Diametro oppoſitum ex Penduli ſimplicis natura deduxit P. Eraſmus Fröhlich S. J. *in Introduct. facili in Doctrin. de motu* §. 86. Aliud ſimile experimentum contra Leibnitianos ſuppeditat idem Pendulum, ſi facias per illud concurrere contra ſe duos Globos argillaceos molles, cum velocitatibus, quæ ſint tunc Maſſis reciprocæ: nam poſt conflictum in linea verticali factum, ambo quieſcent, certo indicio, vires fuiſſe in Ratione Compoſita Maſſarum & velocitatum.

XI.

Philoſophorum alii ex Pendulis conantur oſtendere, diverſam eſſe in diverſis Terraquæ plagis ejuſdem Corporis gravitatem. Nam pluribus ex obſervationibus compertum eſt, Horologii oſcillatorii pendulum, quo propius ad Æquatorem fuit deportatum, eo magis debuiſſe decurtari, ut intra 24. horas æqualem ederet vibrationum numerum. Jam vero ſi idem grave in pendulo faciat hic apud nos vibrationes 86400, alibi vero intra idem tempus faciet vibrationes pauciores, e.g. 86000, id aliunde nequit provenire, quam ex eo, quod gravitas ſeu vis acceleratrix fuerit in loco altero imminuta. Ex hoc porro inferunt, Tellurem noſtram circa Axem ſuum converti; certum enim eſt, ſi Terra gyretur, majorem eſſe vim centrifugam circa Æquatorem, quam in regionibus ab eo remotioribus; at quo major vis centrifuga, eo magis infringitur vis Centripeta, quæ hic eſt Gravitas; itaque ex gravitate decreſcente colligunt vim centrifugam, ex hac gyrum Terræ. Huic argumento opponunt Patroni Terræ quieſcentis, fieri poſſe, ut Pendulum ob calorem ſub Æquatore intenſiorem reddatur longius, atque hinc (*per Num.* III.) oſcillationes fiant tardiores; fieri poſſe, & probabile eſſe, aërem verſus Æquatorem ma-

gis magiſque eſſe elaſticum aut vaporibus conſtipatiorem, atque exinde penduli vim aliquatenus enervari. Tab. III.

XII.

Ex eodem pendulo deducunt alii, gravitatem Lunam verſus minui in Corporibus terreſtribus. Nam obſervante D. Condamine *, Horologium oſcillatorium in America ad ripam Fluminis Amazonum tempore 24. horarum abſolvit oſcillationes 98770, in Urbe Quito altiore abſolvit 98740, & in monte Pichincha, adhuc 750 hexapodas altiore, 98720. Igitur vis acceleratrix, quam pro ipſa Gravitate ſumere libet, eſt in locis editis infirmior, quam in humilioribus.

* *Voyage de la riviere des Amazones.*

XIII.

Alium præterea uſum pendula præſtant Naturæ ſcrutatoribus ad confirmandum illud, quod §. 132. *Obſerv.* 3. *Schol.* memoravimus, videlicet gravitatem Corporum proportionatam eſſe horum Maſsæ, adeo ut Corpus duplo triplove gravius altero poſſideat etiam duplo triplove plus materiæ præ illo, etiamſi Corpora illa ſint heterogenea inter ſe. Nam ſi cum Newtono accipias duas pyxides æquales, ſuſpenſas ex filis longioribus & æqualibus (v.g. 12 pedum) atque in harum centro oſcillationis figas æqualia pondera heterogeneorum quorumcunque corporum, v.g. auri, ſalis, tritici &c; pyxides illæ paribus oſcillationibus ibunt & redibunt juxta ſeſe, certo indicio, impetus & vires eſſe utrinque æquales. Atqui hæ non eſſent æquales, ſi in uno Corpore A plus materiæ contineretur quam in altero B: nam cum vires incipientes hæc Corpora ad oſcillationem impellere, ſcilicet gravitates, hic ſint æquales, profecto vis in Corpore A, utpote per plures particulas diſtributa foret infirmior, quam vis in ipſo B per pauciores particulas diffuſa: Ergo in Corporibus pondere æqualibus æqualis eſt materiæ quantitas. Quis enim non videt, ſi vis aliqua reſolvatur in 1000 partes æquales, & diſtribuatur ex æquo hic per Corpus A 1000 punctorum, illic per B 900 puncto-

rum, intenſiorem eſſe vim in puncto quolibet ipſius B, quam in quolibet ipſius A, cum vis prior ad poſteriorem hîc ſit ut $1\frac{1}{9}$ ad 1. Similiter ſi vis gravitatis in locis editioribus ſit infirmior, quam in humilioribus; infirmior illa, diſtributa per æqualem, ut ante, punctorum phyſicorum numerum, erit nunc in quovis puncto debilior quam ante, adeoque totum Corpus faciet tardius oſcillari.

F I N I S.

O. A. M. D. G.

E R R A T A.

In Tabula I. Fig. 8. adſcribatur arcui *n*F, ubi is a linea recta DC ſecatur, littera *m*.

Pag. 9. in margine *pro* Fig. 2. ex 3. *lege*, Fig. 2. & 3. Pag. 10. lin. 17. *pro*, quam CB ad CA, *lege*, quam AC ad CB. Pag. 12. lin. 11. *pro*, D × *d*, *lege*, D + *d*. Et lin. 12. *pro* (P + D + *d*) = O + P + *d*) *lege*, (P × D + *d*) = O + P × *d*). Pag. 13. linea antepenult. *pro* æquibrium, *lege*, æquilibrium. Pag. 14. lin. 4. *pro*, illa Pondera, *lege*, illæ Potentiæ. Pag. 17. lin. 8. *pro* BQ, *lege*, bp. Pag. 18. lin 10. *pro* MC*n*, *lege* MC. Pag. 23. lin. 27. *pro* Coroll. 4. *lege*, Coroll 10. Pag. 42. lin. 1. *pro*, erit C del ex *s*. *lege*, erit C ex *s*. Pag. 51. lin. 29. *pro*, vectibus (ut in compoſitæ, *lege*, Vectibus compoſitæ (ut in Fig. 41). Pag. 89. *pro* §. 117, *lege* 118.

Fig. 3.

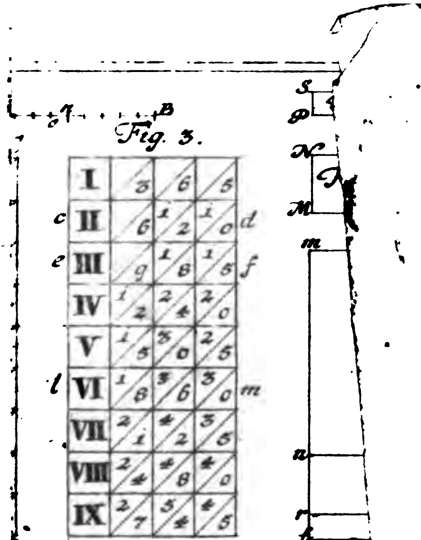


Fig. 10.

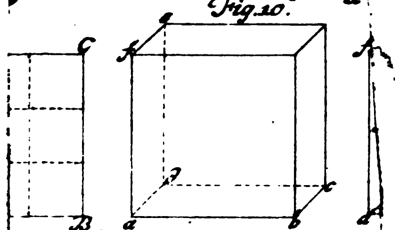
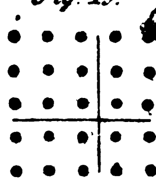


Fig. 15.



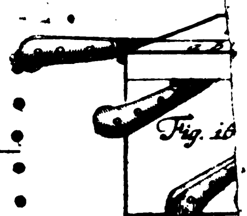


Fig. 16

Fig. 19.



Fig. 18.

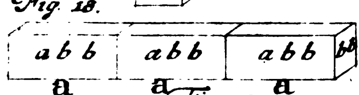
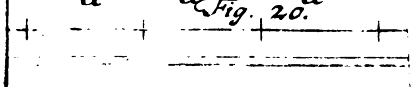
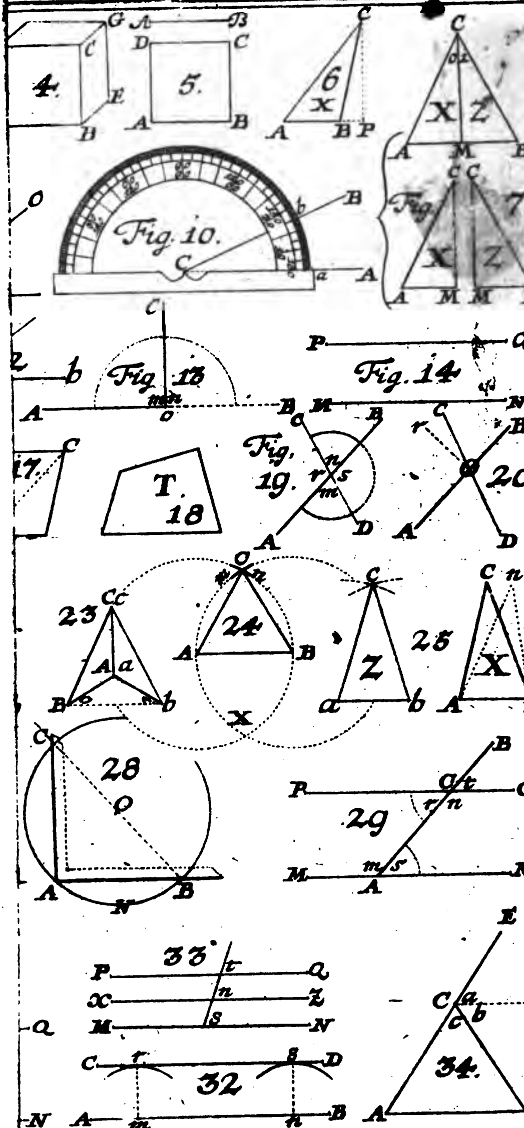
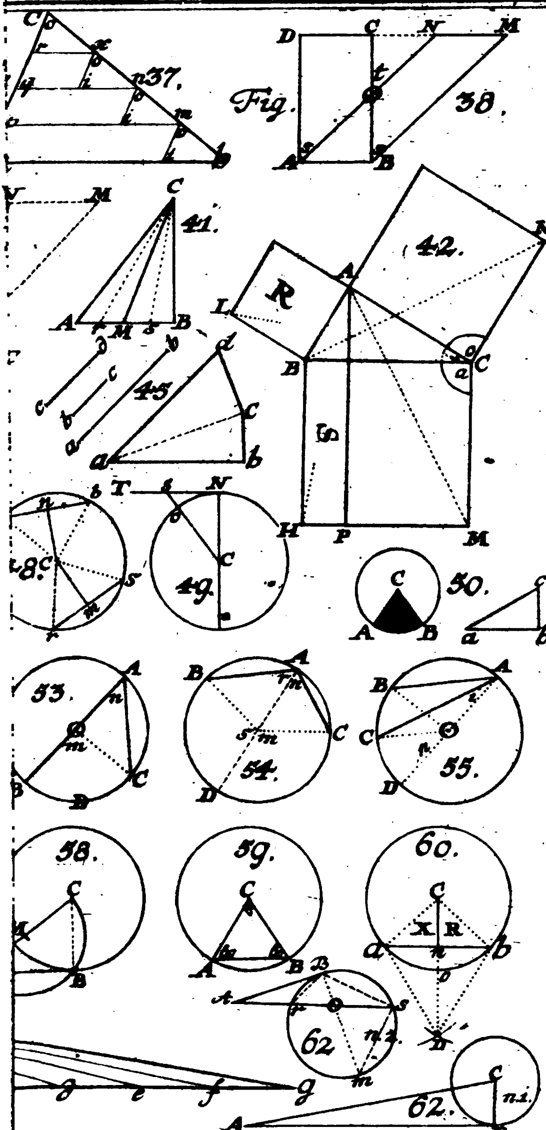
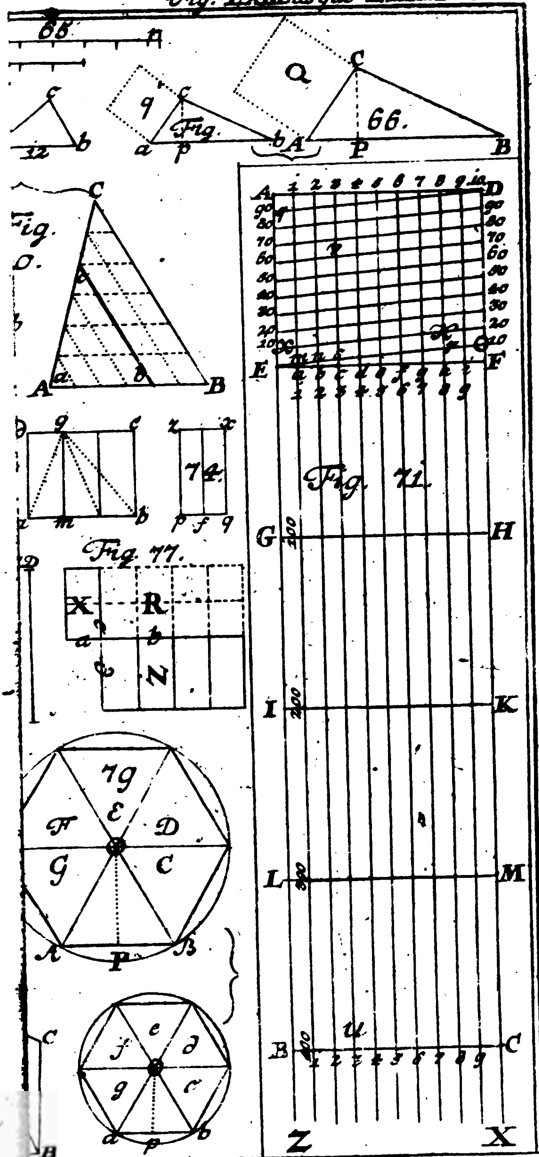


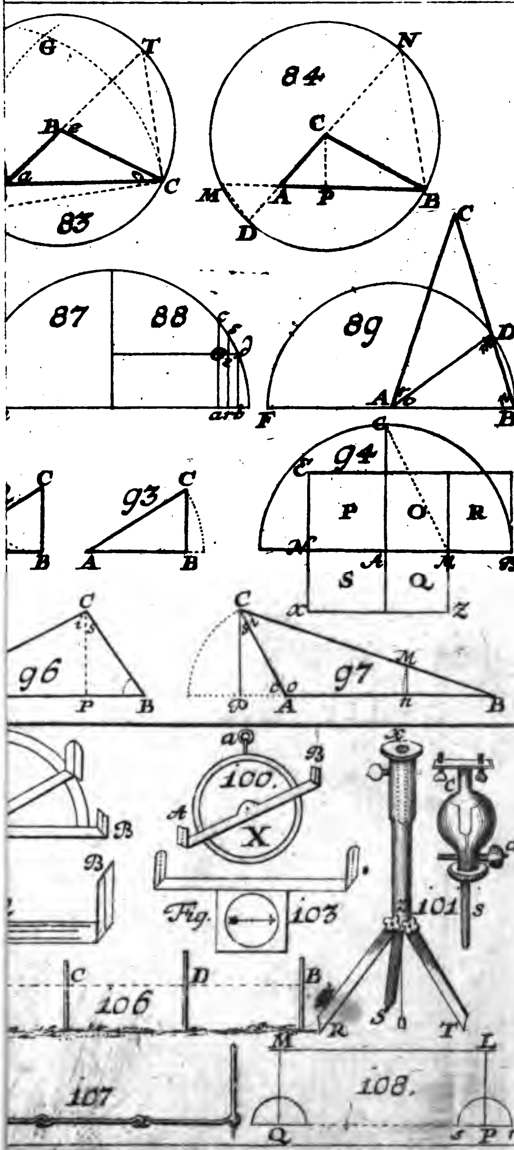
Fig. 20.

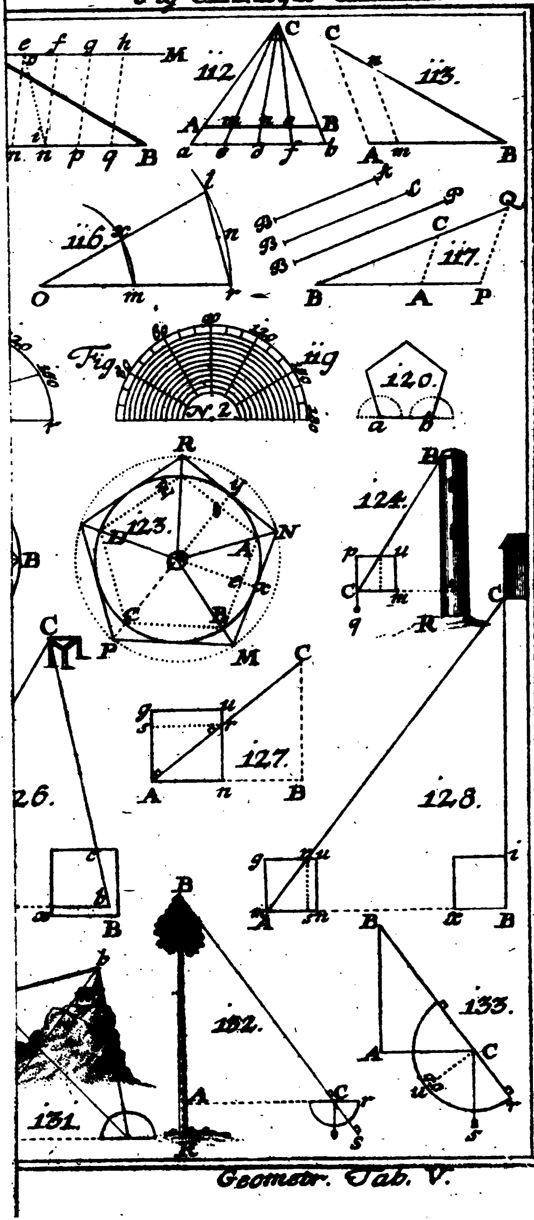


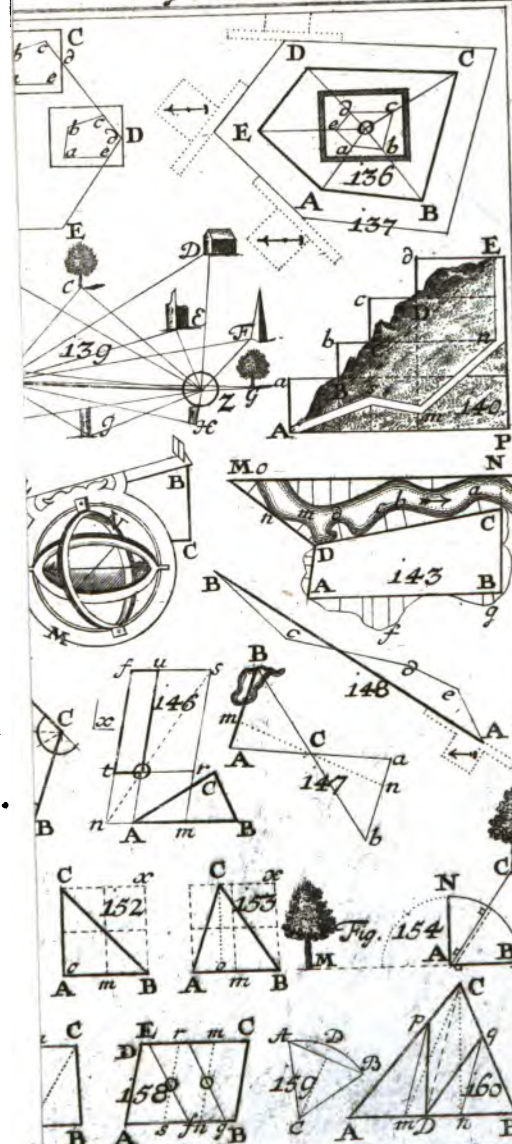

Fig. 10.
Fig. 7.
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 19.
20
18
23
24
25
28
29
33
32
34.

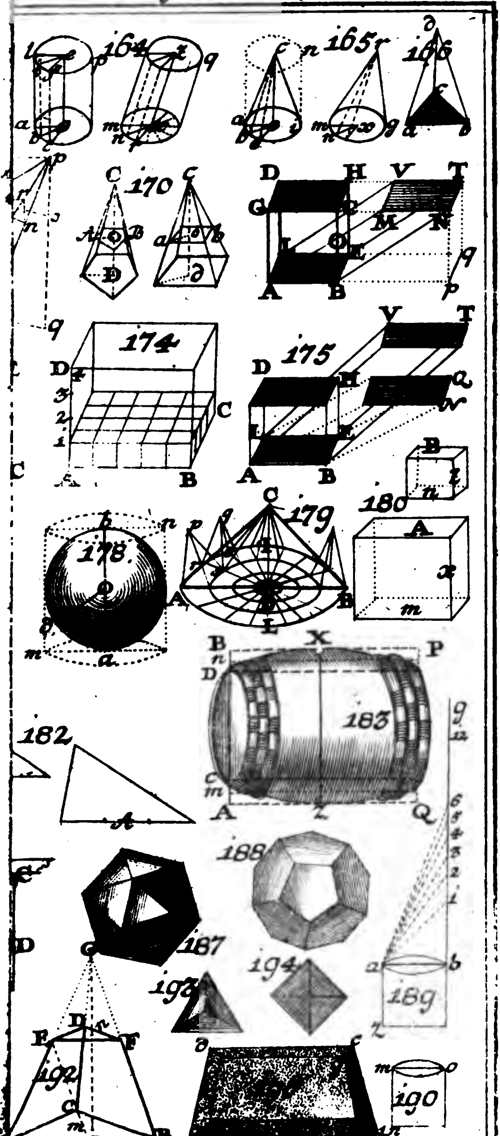

37.
Fig.
38.
41.
42.
R
45
48.
49.
50.
53.
54.
55.
58.
59.
60.
62.
62.


Fig. 66.
Fig. 71.
Fig. 74.
Fig. 77.
79


83
84
87
88
89
93
94
96
97
100.
Fig.
103
101
106
107
108.




136
137
139
140
143
146
147
148
152
153
Fig. 154
158
159
160



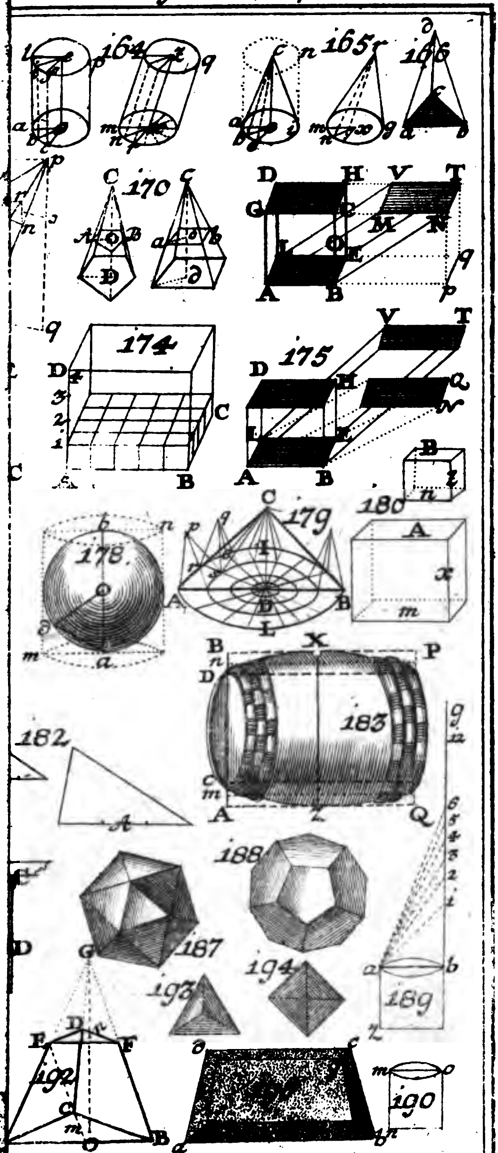
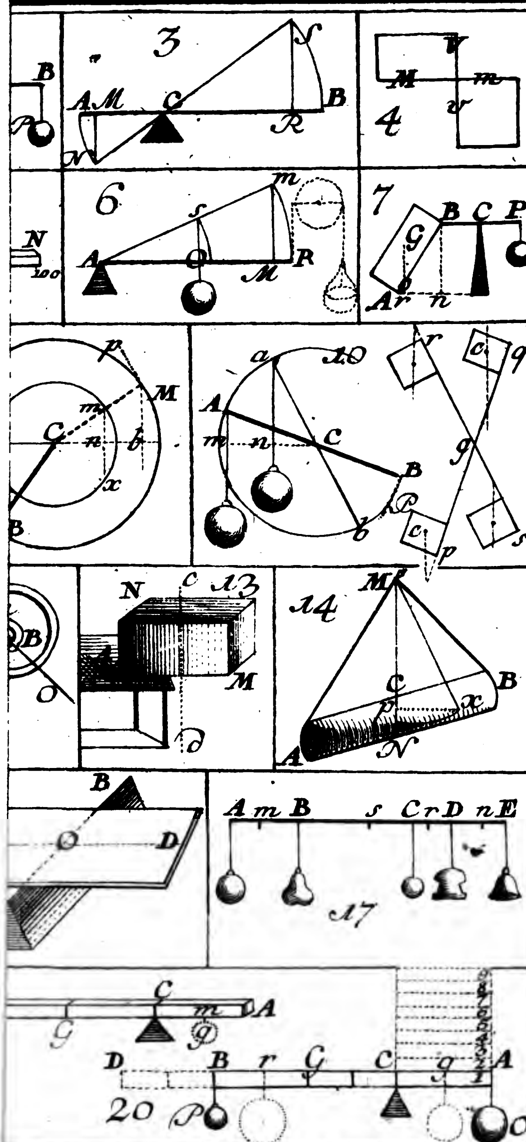

164
165
166
170
174
175
178
179
180
182
183
187
188
189
190
192
193
194

Fig. 1. usq. 2



Mechan. Tab. I

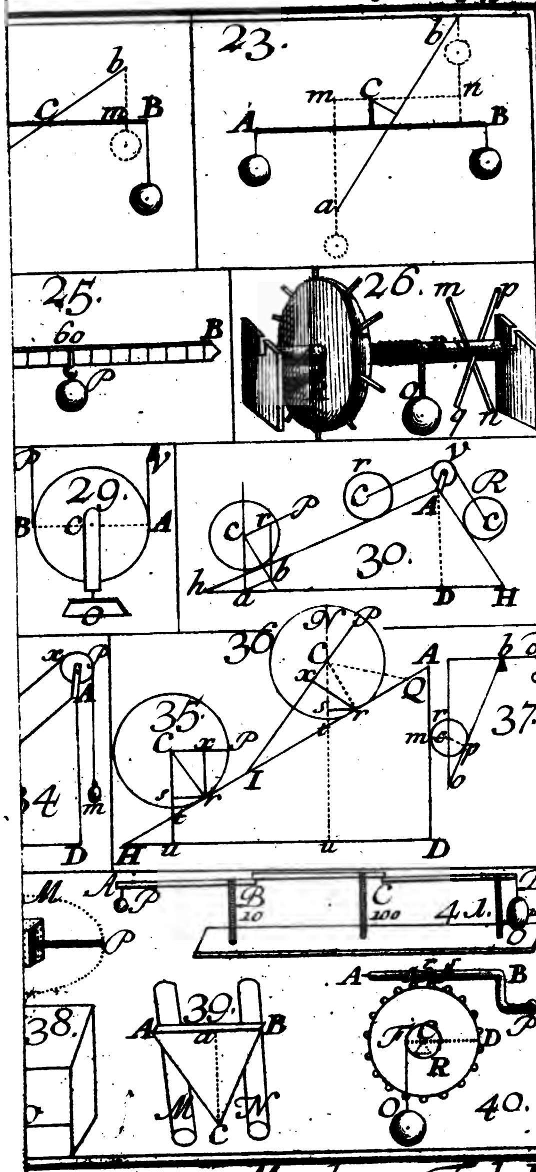
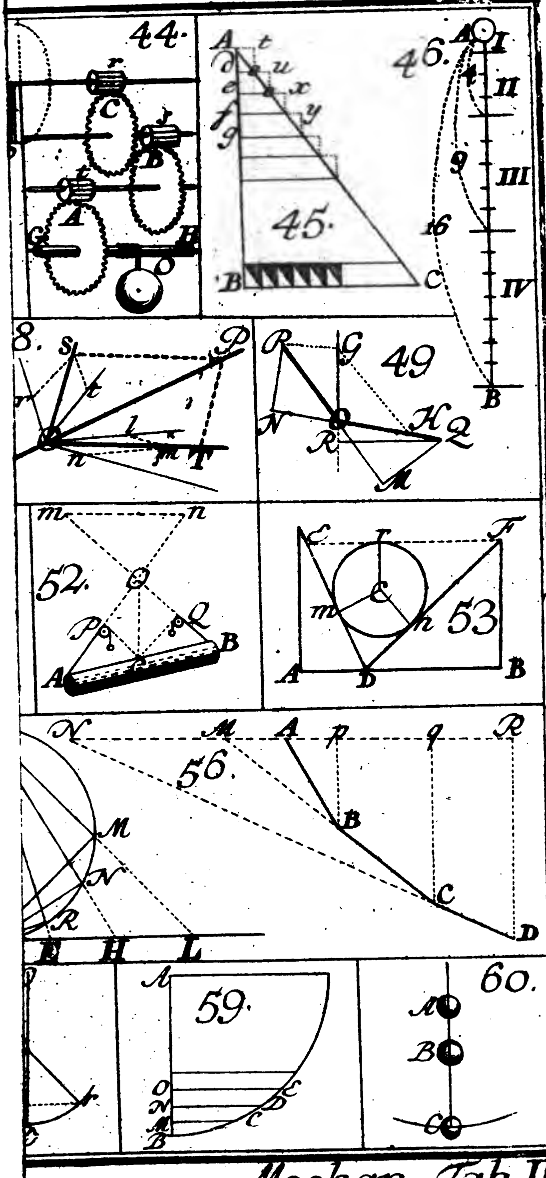

23.
25.
26.
29.
30.
35.
36
37.
34
41.
38.
39.
40.

Fig. 42. uſq. 60.



Mechan. Tab. II.